第十屆培正數學邀請賽

10th Pui Ching Invitational Mathematics Competition

初賽（中四組）

Heat Event (Secondary 4)

時限：1 小時 15 分

Time allowed: 1 hour 15 minutes

參賽者須知：

Instructions to Contestants:

(a) 本卷共設 20 題，總分爲 100 分。

There are 20 questions in this paper and the total score is 100.

(b) 除特別指明外，本卷內的所有數均爲十進制。

Unless otherwise stated, all numbers in this paper are in decimal system.

(c) 所有答案皆是 0 至 9999 之間的整數（包括 0 和 9999）。依照答題紙上的指示填寫答案，毋須呈交計算步驟。

All answers are integers between 0 and 9999 (including 0 and 9999). Follow the instructions on the answer sheet to enter the answers. You are not required to hand in your steps of working.

(d) 不得使用計算機。

The use of calculators is not allowed.

(e) 本卷的附圖不一定依比例繪成。

The diagrams in this paper are not necessarily drawn to scale.

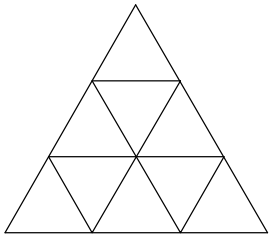
1. 若 x 是正數，且 $(x^3-81x)^2=0$ ，求 x。 （3分）

If x is a positive number such that $(x^3-81x)^2=0$, find x. (3 marks)

2. 在一個梯形中，其中三隻內角分別是 60°、70° 和 x°。求 x 所有可能值之和。 （3分）

In a trapezium, three interior angles are 60°, 70° and x°. Find the sum of all possible values of x. (3 marks)

3. 美儀把圖中 9 個小三角形的其中 n 個塗上顏色，並發現沒有兩個塗了色的三角形有公共邊。求 n 的最大可能值。 （3分）



Brenda coloured n of the 9 small triangles in the figure and found that no two coloured triangles have a common side. Find the greatest possible value of n. (3 marks)

4. 求最大的三位數 n，使得 $\sin 2011°=\cos n°$ 。 （4分）

Find the largest three-digit number n such that $\sin 2011°=\cos n°$. (4 marks)

5. 求 C_3^{2011} 的個位數字。 （4分）

Find the unit digit of C_3^{2011}. (4 marks)

6. 乘積 $4\times51\times601\times7001\times80001\times900001$ 共有多少個數字？ （4分）

How many digits are there in the product $4\times51\times601\times7001\times80001\times900001$? (4 marks)

7. 設 b、c 爲常數。若 x^2+bx+c 除以 $x+2$ 和 $x+4$ 時的餘數相同，求 b。 （4分）

Let b and c be constants. If x^2+bx+c leaves the same remainder when divided by $x+2$ and $x+4$, find b. (4 marks)

8. 某奇數的數字之和是 2011。若把該數除以 18，餘數是多少？ （5分）

The sum of digits of an odd number is 2011. If the number is divided by 18, what is the remainder? (5 marks)

9. 在某次考試中，老師決定調整各人的分數，方法是按平日表現給予每位學生一個獎分。如果一名學生的考試分數是 E 而獎分是 B，則其調整後的分數爲 $5B+\frac{E}{100}(100-5B)$。珮儀和凱欣都有參加考試，雖然兩人的考試分數不同，但調整後的分數卻相同。若珮儀在考試中取得 100 分，則凱欣所得的獎分是多少？（5分）

In an examination, the teacher decided to adjust the scores by awarding a bonus score to each student depending on his/her daily performance. For a student with examination score E and bonus score B, his/her adjusted score will be $5B+\frac{E}{100}(100-5B)$. Polly and Queenie took the examination and, despite having different examination scores, ended up with the same adjusted score. If Polly got a score of 100 in the examination, what bonus score was Queenie awarded? (5 marks)

10. 在某個正 2011 邊形中，每個頂點與中心的距離是 1。求該多邊形的面積，答案準確至最接近整數。（5分）

In a regular 2011-sided polygon, the distance from each vertex to its centre is 1. Find the area of the polygon correct to the nearest integer. (5 marks)

11. 某國家共有六種不同面值的硬幣。如果每種硬幣各取一枚，則在不設找贖的情況下共可繳付 n 個不同的正數金額。求 n 的最大可能值。（5分）

In a country, there are six types of coins with different denominations. By having one of each type of coins, a total of n different positive amounts can be paid without change. Find the greatest possible value of n. (5 marks)

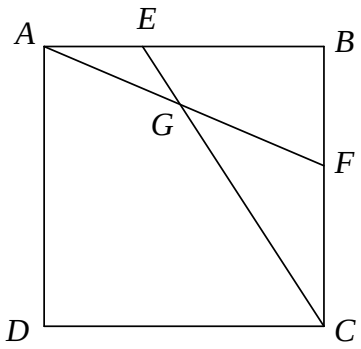
12. 在坐標平面上，直線 $x=0$ 、 $x=3$ 、 $y=0$ 和 $y=mx+129$ 所圍成的區域的面積爲 2011。求 m，答案準確至最接近整數。（5分）

The region on the coordinate plane bounded by the straight lines $x=0$, $x=3$, $y=0$ and $y=mx+129$ has area 2011. Find m correct to the nearest integer. (5 marks)

13. 方程 $\cos x=\cos 4x$ 在 $0°\le x\le 360°$ 範圍內有多少個解？（6分）

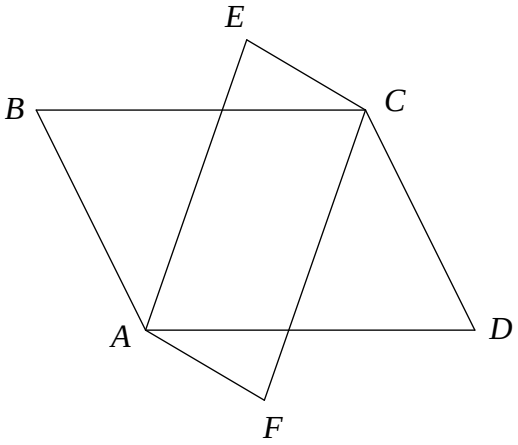
How many solutions are there to the equation $\cos x=\cos 4x$ in the range $0°\le x\le 360°$? (6 marks)

14. 圖中，*ABCD* 是面積爲 10000 的正方形。*E* 和 *F* 分別是 *AB* 和 *BC* 上的點，使得 $AE:EB=1:2$ 和 $BF:FC=3:4$。*AF* 交 *CE* 於 *G*。求四邊形 *BFGE* 的面積，答案準確至最接近整數。（6分）



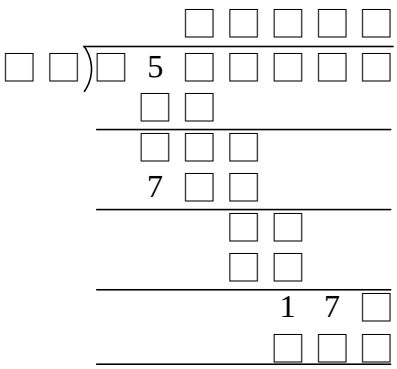
In the figure, *ABCD* is a square of area 10000. *E* and *F* are points on *AB* and *BC* respectively such that $AE:EB=1:2$ and $BF:FC=3:4$. *AF* and *CE* meet at *G*. Find the area of quadrilateral *BFGE* correct to the nearest integer. (6 marks)

15. 圖中，*ABCD* 和 *AECF* 是平行四邊形，其中 $AC=AD=CF$。若 $\angle BCF = 48°$ 而 $\angle ECD = x°$，求 *x*。（6分）



In the figure, *ABCD* and *AECF* are parallelograms and $AC=AD=CF$. If $\angle BCF = 48°$ and $\angle ECD = x°$, find *x*. (6 marks)

16. 圖中顯示一條除式，但當中有些數字留空了。求商（即最頂一行）的最後四位數字。（6分）



The figure shows a division, but some digits are left out. Find the last four digits of the quotient (i.e. the top row). (6 marks)

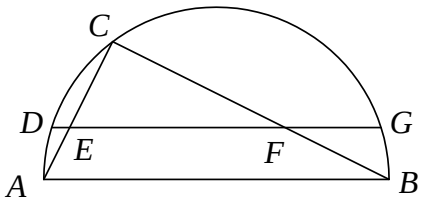
17. 如果三位數 $\overline{abc}$ 可被 5 整除，同時方程 $ax^2+bx+c=0$ 沒有實根，那麼我們說 $\overline{abc}$ 是「壞數」。「壞數」共有多少個？（6分）

A three-digit number $\overline{abc}$ is said to be ‘bad’ if it is divisible by 5 and the equation $ax^2+bx+c=0$ has no real root. How many ‘bad’ numbers are there? (6 marks)

18. 在某等角八邊形中，各邊的長度依次是 9、10、11、12、13、14、p、q。求 q，答案準確至最接近整數。 （6分）

In an equiangular octagon, the side lengths are 9, 10, 11, 12, 13, 14, p, q in order. Find q correct to the nearest integer. (6 marks)

19. 圖中，AB 是半圓的直徑，C 是圓周上的一點。直線 $DEFG$ 與 AB 平行，其中 D、G 位於圓周上，E、F 分別位於 AC 和 BC 上。若 $AC = 30$ 而 $BC = EF = 40$，求 DG 的長度，答案準確至最接近整數。 （7分）



In the figure, AB is the diameter of the semi-circle and C is a point on the circumference. The straight line $DEFG$ is parallel to AB, with D, G lying on the circumference and E, F lying on AC and BC respectively. If $AC = 30$ and $BC = EF = 40$, find the length of DG correct to the nearest integer. (7 marks)

20. 一張咭紙上有 10 個圓，分別編號爲 0 至 9。現要把一個或多個圓塡色，並規定如果編號爲 n 的圓塡了色，則編號爲 n^2 的個位數字的圓亦必須塡色。求塡色方法的總數。 （7分）

On a piece of cardboard there are 10 circles, numbered 0 to 9. We shall now colour one or more circles subject to the following condition: if the circle numbered n is coloured, then the circle whose number is the unit digit of n^2 must also be coloured. Find the number of ways of colouring. (7 marks)

全卷完

END OF PAPER