第十六屆培正數學邀請賽（2017 年）

16th Pui Ching Invitational Mathematics Competition (2017)

初賽（高中組）

Heat Event (Senior Secondary)

時限：1 小時 15 分

Time allowed: 1 hour 15 minutes

參賽者須知：

Instructions to Contestants:

(a) 本卷共設 20 題，總分為 100 分。

There are 20 questions in this paper and the total score is 100.

(b) 除特別指明外，本卷內的所有數均為十進制。

Unless otherwise stated, all numbers in this paper are in decimal system.

(c) 作答時，每題的答案均須以 0 至 9999 之間的整數表示。依照答題紙上的指示填寫答案，毋須呈交計算步驟。

Each answer must be given in the form of an integer between 0 and 9999. Follow the instructions on the answer sheet to enter the answers. You are not required to hand in your steps of working.

(d) 不得使用計算機。

The use of calculators is not allowed.

(e) 本卷的附圖不一定依比例繪成。

The diagrams in this paper are not necessarily drawn to scale.

注意：每題的答案均須以 0 至 9999 之間的整數表示，如有需要應以上述範圍內最接近正確答案的整數回答。如有兩個這樣的整數與正確答案同樣接近，則以「四捨五入」的原則取較大的整數。請細閱答題紙上的指示。

Note: Each answer must be given in the form of an integer between 0 and 9999. Where necessary, the answer should be rounded off to the nearest integer in the above range. Read the instructions on the answer sheet in detail.

1. 某圓的圓心是 O，且 A、B、C 是圓周上的三點。若 $\angle BAC = 130°$ 而 $\angle BOC = x°$，求 x 的值。（3 分）

A circle has centre O, and A, B, C are three points on its circumference. If $\angle BAC = 130°$ and $\angle BOC = x°$, find the value of x. (3 marks)

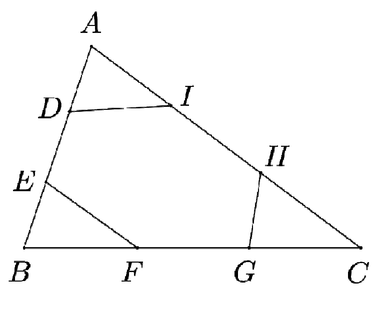
2. 某次數學測驗中，其中一題要求學生寫下一個 10 項的數列，其中每項均為 0 或 1，且從第二項起每項均不小於前一項。這題有多少個不同的正確答案？（3 分）

In a mathematics test, a question asks students to write down a sequence of 10 terms each of which is 0 or 1, such that each term from the second term onwards is not less than the previous term. How many different correct answers are there to this question? (3 marks)

3. 設 $[x]$ 代表不超過 x 的最大整數，例如 $[2.1] = 2$、$[4] = 4$ 和 $[5.7] = 5$。有多少個正整數 n 滿足方程 $\left[\frac{n}{5}\right] = \frac{n}{6}$？（3 分）

Let $[x]$ denote the largest integer not exceeding x. For example, $[2.1] = 2$, $[4] = 4$ and $[5.7] = 5$. How many positive integers n satisfy the equation $\left[\frac{n}{5}\right] = \frac{n}{6}$? (3 marks)

4. 圖中，ΔABC 的面積是 600，點 D 和 E 在邊 AB 上，點 F 和 G 在邊 BC 上，點 H 和 I 在邊 CA 上。若 $AD = DE = EB$，$BF = FG = GC$ 及 $CH = HI = IA$，求六邊形 $DEFGHI$ 的面積。（4 分）



In the figure, ΔABC has area 600. Points D and E lie on side AB, points F and G lie on side BC, while points H and I lie on side CA. If $AD = DE = EB$, $BF = FG = GC$ and $CH = HI = IA$. Find the area of the hexagon $DEFGHI$. (4 marks)

5. 若 $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}$ ，求 $f(2017)$ 的值。 （4 分）

If $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}$, find the value of $f(2017)$. (4 marks)

6. 在平面上，有一條拋物線、一個圓形和一條直線。它們最多可組成多少個交點？ （4 分）

On a plane, there are a parabola, a circle and a straight line. At most how many points of intersection can they form? (4 marks)

7. 某次數學比賽共設 5 個組別，每個組別各設 20 道題。某些題目可出現於超過一個組別，但任意兩個組別的題目最多只有 4 題相同。在這次比賽中，最少有多少道不同的題目？ （4 分）

There are 5 groups in a mathematics competition with 20 problems in each group. Some problems may appear in more than one group, but any two groups have at most 4 problems in common. What is the minimum number of different problems in this competition? (4 marks)

8. 設 a、b 為正整數。若 a 進數 $123_{(a)}$ 與 b 進數 $146_{(b)}$ 相等，求 $a+b$ 的最小可能值，答案以 10 進制表示。 （4 分）

Let a and b be positive integers. If the number $123_{(a)}$ in base a representation and the number $146_{(b)}$ in base b representation are equal, find the smallest possible value of $a+b$ in base 10 notation. (4 marks)

9. 在一個遊戲中，參加者可以射球 5 次，射中 3 球或以上便可得獎。若每球射中的概率均是 50% 而得獎的概率是 x%，求 x 的值。 （5 分）

In a game, the participant shoots a ball 5 times and can win a prize if the target is hit at least 3 times. If the probability of each ball hitting the target is 50% and the probability of winning a prize is x%, find the value of x. (5 marks)

10. 設 n 為正整數，使得方程 $4x^2+nx+144=0$ 沒有實根。求 n 的所有可能值之和。 （5 分）

Let n be a positive integer such that the equation $4x^2+nx+144=0$ has no real root. Find the sum of all possible values of n. (5 marks)

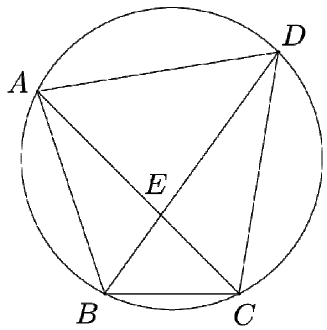
11. 在所示的算式中，每個字母代表一個由 0 至 9 的不同數字。求 ABCD 所代表的四位數。（5 分）

In the multiplication shown, each letter represents a different digit from 0 to 9. Find the four-digit number represented by ABCD. (5 marks)

$$\begin{array}{r} \mathrm{A\ B\ C} \\ \times \quad \mathrm{A\ A} \\ \hline \mathrm{D\ E\ A\ B\ C} \end{array}$$

12. 圖中，$ABCD$ 是圓內接四邊形，其中 $AB=24$、$BC=11$ 及 $CD=DA=31$，且對角線 AC 和 BD 相交於 E。若 $\frac{AE}{EC}$ 以最簡分數表示時為 $\frac{a}{b}$，求 $a+b$ 的值。（5 分）

In the figure, $ABCD$ is a cyclic quadrilateral with $AB=24$, $BC=11$ and $CD=DA=31$. The diagonals AC and BD meet at E. If $\frac{AE}{EC}$ is equal to $\frac{a}{b}$ in lowest term, find the value of $a+b$. (5 marks)

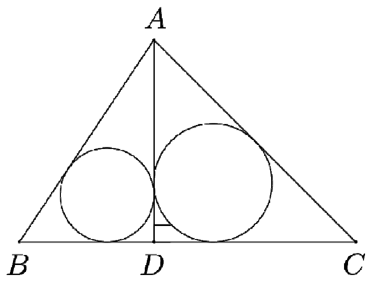


13. 求 $\sqrt{2-\sqrt{2^2-1}}+\sqrt{4-\sqrt{4^2-1}}+\sqrt{6-\sqrt{6^2-1}}+\cdots+\sqrt{80-\sqrt{80^2-1}}$ 的值。（5 分）

Find the value of $\sqrt{2-\sqrt{2^2-1}}+\sqrt{4-\sqrt{4^2-1}}+\sqrt{6-\sqrt{6^2-1}}+\cdots+\sqrt{80-\sqrt{80^2-1}}$. (5 marks)

14. 在 ΔABC 中，$AB=120$ 及 $AC=204$。D 是 A 到 BC 的垂足，其中 $AD=96$。若 x 和 y 分別代表 ΔACD 和 ΔABD 的內切圓半徑，求 $x-y$ 的值。（6 分）

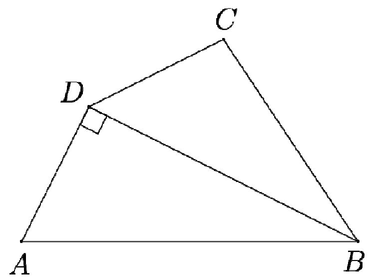
In ΔABC, $AB=120$ and $AC=204$. D is the foot of altitude from A, with $AD=96$. If x and y denote the radius of the inscribed circle of ΔACD and ΔABD respectively, find the value of $x-y$. (6 marks)



15. 子奇在任意連續五天最多打一次籃球，在任意連續三天最多打一次網球，且不會在同一天同時打籃球和網球，也不會參與其他球類活動。那麼，在一月份中，子奇最多會在多少天進行球類活動？ （6分）

Anson plays basketball at most once on any five consecutive days and plays tennis at most once on any three consecutive days. Furthermore, he will not play both basketball and tennis on the same day, nor will he play other ball games. On at most how many days will Anson play ball games in January? (6 marks)

16. 在四邊形 $ABCD$ 中，內角 $\angle B$、$\angle A$、$\angle C$ 和 $\angle D$ 的大小按此次序組成一個等差數列。已知 $\angle ADB = 90°$，且 $AB = 2BC$。若 $\angle C = x°$，求 x 的值。 （6分）

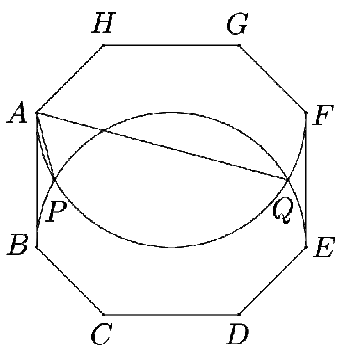


In quadrilateral $ABCD$, the sizes of the interior angles $\angle B$, $\angle A$, $\angle C$ and $\angle D$ form an arithmetic sequence in this order. Suppose $\angle ADB = 90°$ and $AB = 2BC$. If $\angle C = x°$, find the value of x. (6 marks)

17. 設 n 為正整數。若 2999^n 是個 160 位數，且它的最後 10 位數字是 9314862001，求 n 的值。 （7分）

Let n be a positive integer. If 2999^n is a 160-digit number whose last 10 digits are 9314862001, find the value of n. (7 marks)

18. 設 $ABCDEFGH$ 是邊長為 10 的正八邊形。分別以 AF 和 BE 為直徑在八邊形內作半圓，它們相交於點 P 和 Q，其中 P 較 Q 接近 A。求 $AQ - AP$ 的值。 （7分）



Let $ABCDEFGH$ be a regular octagon with side length 10. Using AF and BE as diameters, semi-circles are constructed inside the octagon. They intersect at points P and Q, where P is closer to A than Q. Find the value of $AQ - AP$. (7 marks)

19. 在空間中，Π 是一個平面，而 ℓ 是一條直線，且兩者相交於點 O。設 A、C、E 為 Π 上的點，B、D 為 ℓ 上的點，使得 AB 和 CD 垂直於 ℓ，而 BC 和 DE 則垂直於 Π。若 $OA=72$、$OE=42$ 及 $AE=54$，求 OC 的長度。（7 分）

In a space, Π is a plane and ℓ is a straight line, and they intersect at the point O. Suppose A, C, E are points on Π while points B, D are points on ℓ, such that AB and CD are perpendicular to ℓ, while BC and DE are perpendicular to Π. If $OA=72$, $OE=42$ and $AE=54$, find the length of OC. (7 marks)

20. 設 a、b、c 為不超過 30 的正整數，當中最少有兩個是質數，且 $a^{b+c}=(bc)^a$。那麼，(a,b,c) 共有多少組不同的可能值？（7 分）

Let a, b, c be positive integers not exceeding 30 such that at least two of them are prime numbers and $a^{b+c}=(bc)^a$. How many different sets of possible (a,b,c) are there? (7 marks)

全卷完

END OF PAPER