第十六屆培正數學邀請賽（2017 年）

16th Pui Ching Invitational Mathematics Competition (2017)

初賽（中四組）

Heat Event (Secondary 4)

時限：1 小時 15 分

Time allowed: 1 hour 15 minutes

參賽者須知：

Instructions to Contestants:

(a) 本卷共設 20 題，總分為 100 分。

There are 20 questions in this paper and the total score is 100.

(b) 除特別指明外，本卷內的所有數均為十進制。

Unless otherwise stated, all numbers in this paper are in decimal system.

(c) 作答時，每題的答案均須以 0 至 9999 之間的整數表示。依照答題紙上的指示填寫答案，毋須呈交計算步驟。

Each answer must be given in the form of an integer between 0 and 9999. Follow the instructions on the answer sheet to enter the answers. You are not required to hand in your steps of working.

(d) 不得使用計算機。

The use of calculators is not allowed.

(e) 本卷的附圖不一定依比例繪成。

The diagrams in this paper are not necessarily drawn to scale.

注意：每題的答案均須以 0 至 9999 之間的整數表示，如有需要應以上述範圍內最接近正確答案的整數回答。如有兩個這樣的整數與正確答案同樣接近，則以「四捨五入」的原則取較大的整數。請細閱答題紙上的指示。

Note: Each answer must be given in the form of an integer between 0 and 9999. Where necessary, the answer should be rounded off to the nearest integer in the above range. Read the instructions on the answer sheet in detail.

1. 一個凸四邊形的所有內角（以「度」為單位時）均為質數。若它最大的內角
    是 $x°$，求 x 的最大可能值。 （3分）

    All interior angles of a convex quadrilateral are prime numbers (in degrees). If its
    largest interior angle is $x°$, find the greatest possible value of x. (3 marks)

2. 設 $[x]$ 代表不超過 x 的最大整數，例如 $[2.1] = 2$、$[4] = 4$ 和 $[5.7] = 5$。有多少
    個正整數 n 滿足方程 $\left[\dfrac{n}{5}\right] = \dfrac{n}{6}$？ （3分）

    Let $[x]$ denote the largest integer not exceeding x. For example, $[2.1] = 2$, $[4] = 4$
    and $[5.7] = 5$. How many positive integers n satisfy the equation $\left[\dfrac{n}{5}\right] = \dfrac{n}{6}$? (3 marks)

3. 一個長方形（可能是正方形）每邊的長度皆是不超過 5 的正整數，且其周長
    為 P。求 P 的所有可能值之和。 （3分）

    A rectangle (possibly a square) has all side lengths being positive integers not
    exceeding 5, and its perimeter is P. Find the sum of all possible values of P. (3 marks)

4. 一顆骰子的六面顏色互不相同。若要在每面寫上 1 至 6 其中一個整數（可重
    複使用），使得任意兩個相鄰面的數字之和是偶數，有多少種不同的方法？ （3分）

    The six faces of a die have pairwise different colours. In how many different ways
    can we write an integer from 1 to 6 on each face (each integer can be used more
    than once) such that the sum of the numbers on any two adjacent faces is even? (3 marks)

5. 若 n 以 8 進制表示時是 $55551_{(8)}$，求 n 最小的質因數，答案以 10 進制表示。 （4分）

    If n is equal to $55551_{(8)}$ when expressed in base 8 notation, find the smallest prime
    factor of n. Express your answer in base 10 notation. (4 marks)

6. 若 $f(x) = x - \sqrt{x^2+1} - \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2+1}}$，求 $f(2017)$ 的值。 （4分）

If $f(x) = x - \sqrt{x^2+1} - \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2+1}}$, find the value of $f(2017)$. (4 marks)

7. 在平面上，有一條拋物線、一個圓形和一條直線。它們最多可組成多少個交點？ （4分）

On a plane, there are a parabola, a circle and a straight line. At most how many points of intersection can they form? (4 marks)

8. 小玲和小明玩遊戲：小玲在紙上寫下 100 或 400，然後小明猜小玲寫下的數。如果小明猜中，則小玲得到相當於她所寫的數的負分，否則她可得 +250 分。若小玲選 100 的機會是 400 的兩倍，而小明猜 100 和 400 的機會均等，求小玲得分的期望值。 （4分）

Ann and Ben play a game as follows. Ann writes down either 100 or 400 on a piece of paper, and Ben needs to guess what Ann has written. If Ben guesses correctly, Ann's score is the negative of what she has written; otherwise Ann gets +250 points. If Ann is twice as likely to write 100 as 400, while Ben is as likely to guess 100 as 400, find the expected value of Ann's score. (4 marks)
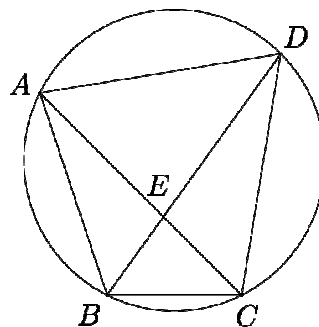
9. 設 n 是正整數，使得 $110n^3$ 剛好有 110 個正因數。那麼，$2017n^4$ 有多少個正因數？ （5分）

Let n be a positive integer such that $110n^3$ has exactly 110 positive factors. How many positive factors does $2017n^4$ have? (5 marks)

10. 圖中，$ABCD$ 是圓內接四邊形，其中 $AB = 24$、$BC = 11$ 及 $CD = DA = 31$，且對角線 AC 和 BD 相交於 E。若 $\dfrac{AE}{EC}$ 以最簡分數表示時為 $\dfrac{a}{b}$，求 $a+b$ 的值。 （5分）

In the figure, $ABCD$ is a cyclic quadrilateral with $AB = 24$, $BC = 11$ and $CD = DA = 31$. The diagonals AC and BD meet at E. If $\dfrac{AE}{EC}$ is equal to $\dfrac{a}{b}$ in lowest term, find the value of $a+b$. (5 marks)

11. 在所示的算式中，每個字母代表一個由 0 至 9 的不
同數字。求 ABCD 所代表的四位數。 （5分）

In the multiplication shown, each letter represents a
different digit from 0 to 9. Find the four-digit number
represented by ABCD. (5 marks)

$$\begin{array}{r} A\ B\ C \\ \times\qquad A\ A \\ \hline D\ E\ A\ B\ C \end{array}$$

12. 某 5 個數的中位數、眾數和分佈域均為 20。若它們的平均數是 M，求 M 的
最大可能值和最小可能值之差。 （5分）

The median, mode and range of 5 numbers are all equal to 20. If their mean is M,
find the difference between the largest and smallest possible values of M. (5 marks)

13. 子奇在任意連續五天最多打一次籃球，在任意連續三天最多打一次網球，且
不會在同一天同時打籃球和網球，也不會參與其他球類活動。那麼，在一月
份中，子奇最多會在多少天進行球類活動？ （6分）
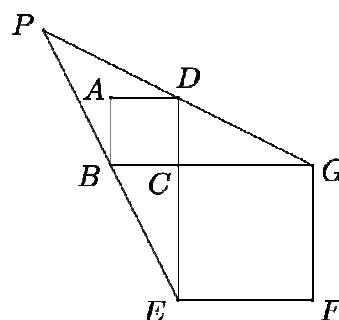
Anson plays basketball at most once on any five consecutive days and plays tennis
at most once on any three consecutive days. Furthermore, he will not play both
basketball and tennis on the same day, nor will he play other ball games. On at
most how many days will Anson play ball games in January? (6 marks)

14. 圖中，*ABCD* 是邊長為 4 的正方形，*CEFG* 是邊
長為 6 的正方形，其中 *B*、*C*、*G* 共線，且 *D*、
C、*E* 也共線。若 *P* 為 *EB* 和 *GD* 延長線的交
點，求四邊形 *PEFG* 的面積。 （6分）

In the figure, *ABCD* is a square of side length 4 and
CEFG is a square of side length 6, with *B*, *C*, *G*
collinear and *D*, *C*, *E* collinear. If *P* is the point of
intersection of the extensions of *EB* and *GD*, find
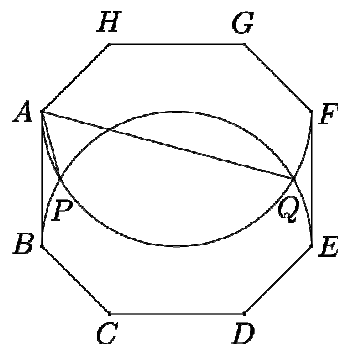the area of the quadrilateral *PEFG*. (6 marks)

15. 設 x 和 y 是非零實數，使得 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(2017-x)^2+(y-14)^2}$ 達至其最
小值。求 $\dfrac{x-1}{y}$ 的值。 （6分）

Let x and y be non-zero real numbers which minimise the expression
$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(2017-x)^2+(y-14)^2}$. Find the value of $\dfrac{x-1}{y}$. (6 marks)

16. 求最大的正整數 n，使得 $2^{13}+2^{10}+2^n$ 是平方數。 （6分）

Find the largest positive integer n such that $2^{13}+2^{10}+2^n$ is a square number. (6 marks)

17. 設 n 為正整數。若 2999^n 是個 160 位數，且它的最後 10 位數字是 9314862001，求 n 的值。 （7分）

Let n be a positive integer. If 2999^n is a 160-digit number whose last 10 digits are 9314862001, find the value of n. (7 marks)

18. 有多少種方法給 4×4 方格表的一半格子塗色，使得每行和每列均有剛好 2 個被塗色的格子，且不存在 4 個未被塗色的格子，使得它們的中心組成一個與方格表平行的長方形（包括正方形）？ （7分）

How many ways are there to paint half of the cells of a 4×4 grid such that there are exactly 2 painted cells in each row and column, and there do not exist 4 unpainted cells whose centres form a rectangle (possibly a square) parallel to the grid? (7 marks)

19. 設 $f(x)$ 為多項式。若有無窮多個質數 p 滿足 $f(p)\sin\dfrac{p\pi}{4}=16$，求 $[f(2)]^2$ 的值。 （7分）

Let $f(x)$ be a polynomial. If there are infinitely many prime numbers p satisfying $f(p)\sin\dfrac{p\pi}{4}=16$, find the value of $[f(2)]^2$. (7 marks)

20. 設 $ABCDEFGH$ 是邊長為 10 的正八邊形。分別以 AF 和 BE 為直徑在八邊形內作半圓，它們相交於點 P 和 Q，其中 P 較 Q 接近 A。求 $AQ-AP$ 的值。 （7分）

Let $ABCDEFGH$ be a regular octagon with side length 10. Using AF and BE as diameters, semi-circles are constructed inside the octagon. They intersect at points P and Q, where P is closer to A than Q. Find the value of $AQ-AP$. (7 marks)

全卷完

END OF PAPER