第十六屆培正數學邀請賽（2017 年）

16th Pui Ching Invitational Mathematics Competition (2017)

初賽（中三組）

Heat Event (Secondary 3)

時限：1 小時 15 分

Time allowed: 1 hour 15 minutes

參賽者須知：

Instructions to Contestants:

(a) 本卷共設 20 題，總分為 100 分。

There are 20 questions in this paper and the total score is 100.

(b) 除特別指明外，本卷內的所有數均為十進制。

Unless otherwise stated, all numbers in this paper are in decimal system.

(c) 作答時，每題的答案均須以 0 至 9999 之間的整數表示。依照答題紙上的指示填寫答案，毋須呈交計算步驟。

Each answer must be given in the form of an integer between 0 and 9999. Follow the instructions on the answer sheet to enter the answers. You are not required to hand in your steps of working.

(d) 不得使用計算機。

The use of calculators is not allowed.

(e) 本卷的附圖不一定依比例繪成。

The diagrams in this paper are not necessarily drawn to scale.

注意：每題的答案均須以 0 至 9999 之間的整數表示，如有需要應以上述範圍內最接近正確答案的整數回答。如有兩個這樣的整數與正確答案同樣接近，則以「四捨五入」的原則取較大的整數。請細閱答題紙上的指示。

Note: Each answer must be given in the form of an integer between 0 and 9999. Where necessary, the answer should be rounded off to the nearest integer in the above range. Read the instructions on the answer sheet in detail.

1. 一個銳角三角形的所有內角（以「度」為單位時）均為質數。若它最大的內角是 $x°$，求 x 的值。（3 分）

   All interior angles of an acute triangle are prime numbers (in degrees). If its largest interior angle is $x°$, find the value of x. (3 marks)

2. 正整數 m 和 n 之積為 1000，且它們的最小公倍數為 L。求 L 的最小可能值。（3 分）

   The product of the positive integers m and n is 1000, and their L.C.M. is L. Find the smallest possible value of L. (3 marks)

3. 黑板上有一些非負整數，在每一輪我們均進行以下操作：對黑板上的每個整數 n，我們把它擦掉，然後寫上 n 個 n。若開始時黑板上的數是 2、0、1 和 7，那麼，經過 3 輪操作後黑板上有多少個數？（3 分）

   There are some non-negative integers on the blackboard. In each round, the following operation is carried out: for each integer n on the blackboard, we erase it and then write down n copies of n. If the numbers on the blackboard are 2, 0, 1 and 7 initially, how many numbers are there on the blackboard after 3 rounds of operation? (3 marks)

4. 一個長方形（可能是正方形）每邊的長度皆是不超過 5 的正整數，且其周長為 P。求 P 的所有可能值之和。（3 分）

   A rectangle (possibly a square) has all side lengths being positive integers not exceeding 5, and its perimeter is P. Find the sum of all possible values of P. (3 marks)

5. 現有 5 個正整數，它們當中任意 3 個之和均小於 6。求這 5 個正整數之和的最大可能值。（4 分）

   There are 5 positive integers. The sum of any 3 of them is less than 6. Find the greatest possible value of the sum of these 5 positive integers. (4 marks)

6. 現有四種不同顏色的咭各 10 張，每種顏色的 10 張咭分別標上 1、2、…、10。那麼，共有多少種方法選取 2 張相同顏色的咭？ （4 分）

There are cards of four different colours, with 10 cards of each colour labelled 1, 2, …, 10 respectively. In how many different ways can 2 cards of the same colour be chosen? (4 marks)

7. 小玲和小明玩遊戲：小玲在紙上寫下 100 或 400，然後小明猜小玲寫下的數。如果小明猜中，則小玲得到相當於她所寫的數的負分，否則她可得 +250 分。若小玲選 100 的機會是 400 的兩倍，而小明猜 100 和 400 的機會均等，求小玲得分的期望值。 （4 分）

Ann and Ben play a game as follows. Ann writes down either 100 or 400 on a piece of paper, and Ben needs to guess what Ann has written. If Ben guesses correctly, Ann's score is the negative of what she has written; otherwise Ann gets +250 points. If Ann is twice as likely to write 100 as 400, while Ben is as likely to guess 100 as 400, find the expected value of Ann's score. (4 marks)

8. 若 n 以 8 進制表示時是 $55551_{(8)}$，求 n 最小的質因數，答案以 10 進制表示。 （4 分）

If n is equal to $55551_{(8)}$ when expressed in base 8 notation, find the smallest prime factor of n. Express your answer in base 10 notation. (4 marks)

9. 在某個數列中，第 mn 項總是等於第 m 項和第 n 項之和，其中 m、n 為任意正整數。若數列的第 20 項為 17 而第 80 項為 29，求它的第 5000 項。 （5 分）

In a sequence, the mn-th term is always equal to the sum of the m-th and the n-th terms for any positive integers m and n. If the 20th term of the sequence is 17 while the 80th term is 29, find its 5000th term. (5 marks)

10. 設 x、y 為正實數，其中 $x > y$。若 $x^2 + xy + y^2 = 28$ 及 $x^2 - xy + y^2 = 20$，求 x 的值。 （5 分）

Let x and y be positive real numbers such that $x > y$. If $x^2 + xy + y^2 = 28$ and $x^2 - xy + y^2 = 20$, find the value of x. (5 marks)

11. 有多少個不同的三角形每邊的長度皆是不超過 5 的正整數（兩個全等的三角形視為相同）？（5 分）

How many distinct triangles have all side lengths being positive integers not exceeding 5? (Two congruent triangles are regarded to be the same.) (5 marks)

12. 在一個遊戲中，參加者需填滿左至右的三個方格。第一和第三個方格均需填上一個不超過 10 的正整數（可以相同），第二個方格則填上 +、−、× 或 ÷。若所得出的算式等於一個正整數，參加者便可得獎。那麼，共有多少種不同的方法得獎？（5 分）

In a game, the participant has to fill in three squares from left to right. Both the first and the third squares are to be filled by a (possibly the same) positive integer not exceeding 10, while the second square is to be filled by +, −, × or ÷. The participant can win a prize if the resulting expression is equal to a positive integer. In how many different ways can one win a prize? (5 marks)

13. 現有四張卡片，每張均寫有一個小於 10 的正整數，使得 4 個數互不相同。這些卡片可排列成 24 個不同的四位數。若這 24 個四位數之和是 S，且 p 是 S 的質因數，求 p 的最大可能值。（6 分）

There are 4 cards, each with a positive integer less than 10 written and the 4 numbers are pairwise distinct. These cards can be permuted to form 24 different four-digit numbers. If the sum of these 24 four-digit numbers is S and p is a prime factor of S, find the greatest possible value of p. (6 marks)

14. 一顆骰子的六面顏色互不相同。若要在每面寫上 -1、0 或 1，使得任意兩個相鄰面的數字之積是非負數，有多少種不同的方法？（6 分）

The six faces of a die have pairwise different colours. In how many different ways can we write -1, 0 or 1 on each face such that the product of the numbers on any two adjacent faces is non-negative? (6 marks)

15. 設 m、n 為正整數，其中 $n > 2017$。若 $x^2 + mx + 2017 = 0$ 和 $x^2 + mx + n = 0$ 兩條方程均有整數解，求 n 的最小可能值。（6 分）

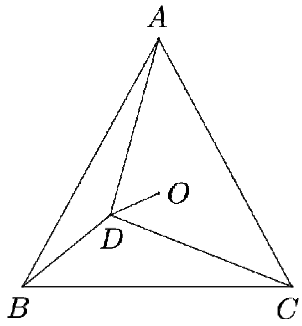
Let m and n be positive integers with $n > 2017$. If both equations $x^2 + mx + 2017 = 0$ and $x^2 + mx + n = 0$ have integral solutions, find the smallest possible value of n. (6 marks)

16. 設 x 和 y 是非零實數，使得 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(2017-x)^2+(y-14)^2}$ 達至其最小值。求 $\frac{x-1}{y}$ 的值。 （6分）

Let x and y be non-zero real numbers which minimise the expression $\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(2017-x)^2+(y-14)^2}$. Find the value of $\frac{x-1}{y}$. (6 marks)

17. 圖中，ABC 是等邊三角形，O 為其中心。D 是 ΔABC 內的一點，使得 ΔABD、ΔBCD 和 ΔCAD 的面積比為 $2:3:4$。若 $OD=60$，求 AB 的長度。 （7分）

In the figure, ΔABC is equilateral with centre O. D is a point inside ΔABC such that the ratio of the areas of ΔABD, ΔBCD and ΔCAD is $2:3:4$. If $OD=60$, find the length of AB. (7 marks)

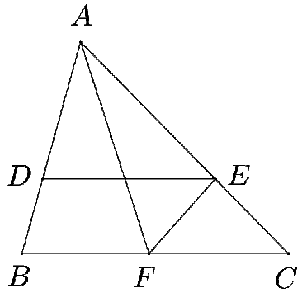


18. 有多少種方法給 4×4 方格表的一半格子塗色，使得每行和每列均有剛好 2 個被塗色的格子，且不存在 4 個未被塗色的格子，使得它們的中心組成一個與方格表平行的長方形（包括正方形）？ （7分）

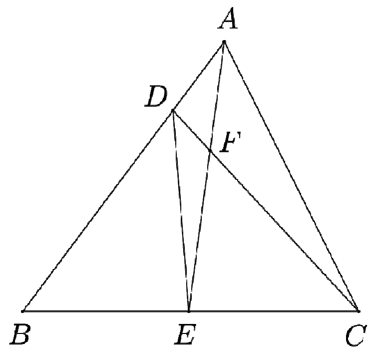
How many ways are there to paint half of the cells of a 4×4 grid such that there are exactly 2 painted cells in each row and column, and there do not exist 4 unpainted cells whose centres form a rectangle (possibly a square) parallel to the grid? (7 marks)

19. 在 ΔABC 中，$AB=12$、$BC=15$ 及 $CA=18$。點 D 和 E 分別在邊 AB 和 AC 上，使得 $DE \mathbin{//} BC$ 及 $AD:DB=2:1$。設 F 是邊 BC 上的點，使得 AF 平分 $\angle BAC$。若 $\cos\angle EFC$ 以最簡分數表示時是 $\frac{a}{b}$，求 $a+b$ 的值。 （7分）

In ΔABC, $AB=12$, $BC=15$ and $CA=18$. Points D and E lie on sides AB and AC respectively such that $DE \mathbin{//} BC$ and $AD:DB=2:1$. Let F be a point on side BC such that AF bisects $\angle BAC$. If $\cos\angle EFC$ is equal to $\frac{a}{b}$ in lowest form, find the value of $a+b$. (7 marks)



20. 在 ΔABC 中，D 是邊 AB 上的一點，E 是邊 BC 上的一點，且 F 是 CD 和 AE 的交點。若 ΔABC、ΔDEF 和 ΔAFC 的面積分別是 1450、126 和 300，求 ΔADF 和 ΔCEF 的面積之差。



（7 分）

In ΔABC, D is a point on side AB, E is a point on side BC and F is the intersection of CD and AE. If the areas of ΔABC, ΔDEF and ΔAFC are 1450, 126 and 300 respectively, find the difference between the areas of ΔADF and ΔCEF.

(7 marks)

全卷完

END OF PAPER