第十六屆培正數學邀請賽（2017 年）

16th Pui Ching Invitational Mathematics Competition (2017)

初賽（中二組）

Heat Event (Secondary 2)

時限：1 小時 15 分

Time allowed: 1 hour 15 minutes

參賽者須知：

Instructions to Contestants:

(a) 本卷共設 20 題，總分為 100 分。

There are 20 questions in this paper and the total score is 100.

(b) 除特別指明外，本卷內的所有數均為十進制。

Unless otherwise stated, all numbers in this paper are in decimal system.

(c) 作答時，每題的答案均須以 0 至 9999 之間的整數表示。依照答題紙上的指示填寫答案，毋須呈交計算步驟。

Each answer must be given in the form of an integer between 0 and 9999. Follow the instructions on the answer sheet to enter the answers. You are not required to hand in your steps of working.

(d) 不得使用計算機。

The use of calculators is not allowed.

(e) 本卷的附圖不一定依比例繪成。

The diagrams in this paper are not necessarily drawn to scale.

注意：每題的答案均須以 0 至 9999 之間的整數表示，如有需要應以上述範圍內最接近正確答案的整數回答。如有兩個這樣的整數與正確答案同樣接近，則以「四捨五入」的原則取較大的整數。請細閱答題紙上的指示。

Note: Each answer must be given in the form of an integer between 0 and 9999. Where necessary, the answer should be rounded off to the nearest integer in the above range. Read the instructions on the answer sheet in detail.

1. 現有 10 個編號為 1 至 10 的球。有多少種方法從中選出 3 個球，使得它們的編號是連續正整數？（3 分）

   There are 10 balls labelled 1 to 10. How many ways are there to choose 3 balls such that their labels are consecutive positive integers? (3 marks)

2. 有多少對非負整數 (m,n) 使得 m 和 n 均不大於 8，且它們之積是 0？（3 分）

   How many pairs of non-negative integers (m,n) are there such that m and n both do not exceed 8 and their product is 0? (3 marks)

3. 在一個 6×6 的方格表中，其中 3 格被塗上顏色。若共有 m 行和 n 列沒有格子被塗上顏色，求 $m+n$ 的最大可能值。（3 分）

   There is a 6×6 grid and 3 of the cells are coloured. If a total of m rows and n columns contain no coloured cell, find the greatest possible value of $m+n$. (3 marks)

4. 設 m、n 為四位數，且它們的最大公因數為 d。若 n 的每位數字均比 m 對應的數字小 1，求 d 的最大可能值。（3 分）

   Let m and n be four-digit numbers whose H.C.F. is d. If each digit of n is 1 smaller than the corresponding digit of m, find the greatest possible value of d. (3 marks)

5. 一個直徑為 7 的圓形的面積是 x，另一個半徑為 21 的圓形的面積是 kx。求 k 的值。（4 分）

   A circle with diameter 7 has area x. Another circle with radius 21 has area kx. Find the value of k. (4 marks)

6. 有多少個正整數 n 可使得 n^2+3n+3 是平方數？（4 分）

   How many positive integers n are there such that n^2+3n+3 is a square number? (4 marks)

7. 在一個 4×4 方格表中，每格均有一個正整數，使得每行和每列的 4 個數均互不相同。若方格表 16 個正整數之和為 S，求 S 的最小可能值。（4 分）

A positive integer is put in each cell of a 4×4 grid such that the 4 numbers in each row and column are pairwise distinct. If the sum of the 16 numbers in the grid is S, find the smallest possible value of S. (4 marks)

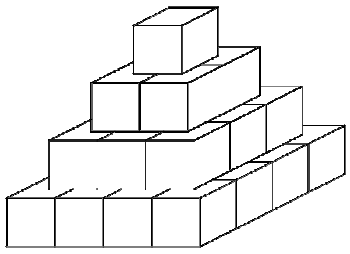
8. 一家水果店售賣蘋果和橙。蘋果每個售 4 元，橙每個售 5 元。穎妮在水果店花了 n 元，其中 n 是不超過 20 的正整數。她所買水果的組合有多少個不同的可能性？（4 分）

A fruit store sells apples and oranges. The apples are sold at \$4 each and oranges \$5 each. Winnie spent n dollars in the store, where n is a positive integer not exceeding 20. How many different possible combinations are there for the fruits she bought? (4 marks)

9. 求最小的正整數 n，使得 $n+28$ 是平方數，而 $24n$ 是立方數。（5 分）

Find the smallest positive integer n such that $n+28$ is a square number while $24n$ is a cubic number. (5 marks)

10. 現有一個由 30 塊正方體積木砌成的 4 層金字塔，當中每個不在底層的正方體均疊在下一層的 4 個正方體之上。底層共有 16 個正方體，第二層共有 9 個正方體，第三層共有 4 個正方體，而頂層則有 1 個正方體。若底層的 16 個正方體分別寫有整數 1 至 16，而其餘正方體均寫有它下面 4 個正方體上的整數之和，求頂層正方體所寫整數的最大可能值。（5 分）



There is a 4-layer pyramid formed by 30 cubic blocks, and each cube not in the bottom layer is above 4 cubes in the lower layer. There are 16 cubes in the bottom layer, 9 cubes in the second layer, 4 cubes in the third layer and 1 cube in the top layer. If the 16 cubes in the bottom layer are labelled by the integers 1 to 16 respectively, and every other cube is labelled by the sum of the labels on the four cubes underneath, find the greatest possible value of the label on the cube in the top layer. (5 marks)

11. 正整數 m 和 n 之和為 46，且它們的最小公倍數為 L。求 L 的最大可能值。 （5 分）

The sum of the positive integers m and n is 46, and their L.C.M. is L. Find the greatest possible value of L. (5 marks)

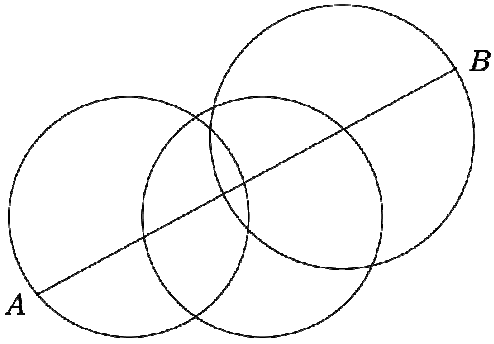
12. 一個錐體共有 n 條邊，且它們的長度均相等。求 n 的最大可能值。 （5 分）

A pyramid has n edges, all of which have the same length. Find the greatest possible value of n. (5 marks)

13. 現有 9 個正整數，若我們將當中某兩個數加起來，可得到若干個不同的和。已知得到的最小的和是 123，最大的和是 456。求 9 個正整數之和的最大可能值。 （6 分）

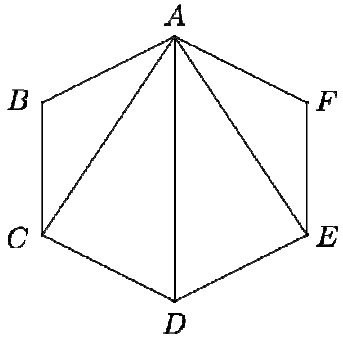
There are 9 positive integers. By adding any two of the numbers, several different sums can be obtained. It is known that the smallest sum obtained is 123, while the greatest sum is 456. Find the greatest possible value of the sum of the 9 positive integers. (6 marks)

14. 現有三個直徑為 d 的圓形，其中第一和第三個圓的圓心均在第二個圓上。A 和 B 分別位於在第一和第三個圓上，使得 $AB = 468$。求 d 的最小可能值。 （6 分）



There are three circles of diameter d such that the centres of the first and the third circle lie on the second circle. A and B are points on the first and the third circle respectively such that $AB = 468$. Find the smallest possible value of d. (6 marks)

15. 設 $ABCDEF$ 是邊長為 6 的正六邊形。求 $AC \times AD \times AE$ 的值。 （6 分）

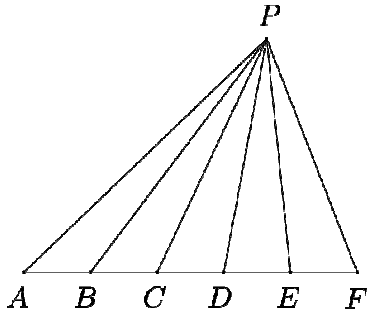


Let $ABCDEF$ be a regular hexagon with side length 6. Find the value of $AC \times AD \times AE$. (6 marks)

16. 有多少種方法在 2×2 方格表的每格填上一個正整數，使得四個數之積等於 120，且每行和每列的兩數之和均小於 10？ （6 分）

How many ways are there to put a positive integer in each cell of a 2×2 grid, such that the product of the four numbers is equal to 120, and that the sum of the two numbers in each row and column is less than 10? (6 marks)

17. 圖中， A、B、C、D、E、F 位於同一直線上，使得 $AB=BC=CD=DE=EF=1$。若 $PC=\pi$ 而 $PF=\sqrt{59-5\pi^2}$ ，求 $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2+PE^2+PF^2$ 的值。 （7 分）

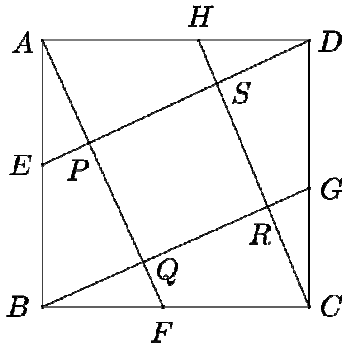


In the figure, A, B, C, D, E, F lie on the same straight line with $AB=BC=CD=DE=EF=1$. If $PC=\pi$ and $PF=\sqrt{59-5\pi^2}$, find the value of $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2+PE^2+PF^2$. (7 marks)

18. 對正整數 k，設 $S(k)$ 表示 k 的數字之和，例如：$S(2017)=2+0+1+7=10$。若 $n+S(n)+S(S(n))=2^4+0^4+1^4+7^4$ ，求 n 的所有可能值之和。 （7 分）

For positive integer k, let $S(k)$ denote the sum of digits of k, e.g. $S(2017)=2+0+1+7=10$. If $n+S(n)+S(S(n))=2^4+0^4+1^4+7^4$, find the sum of all possible values of n. (7 marks)

19. 圖中，$ABCD$ 是正方形，點 E、F、G、H 分別在邊 AB、BC、CD、DA 上。DE 和 AF 相交於 P，AF 和 BG 相交於 Q，BG 和 CH 相交於 R，CH 和 DE 相交於 S，其中 $PQRS$ 為正方形。若 $ABCD$ 的邊長是 156 而 $PQRS$ 的邊長是 84，求 AE 的長度。 （7 分）



In the figure, $ABCD$ is a square and points E, F, G, H lie on sides AB, BC, CD and DA respectively. DE and AF intersect at P, AF and BG intersect at Q, BG and CH intersect at R, CH and DE intersect at S, where $PQRS$ is a square. If the side length of $ABCD$ is 156 while the side length of $PQRS$ is 84, find the length of AE. (7 marks)

20. 設 $[x]$ 代表不超過 x 的最大整數，例如 $[2.1]=2$ 、$[4]=4$ 和 $[5.7]=5$ 。有多少個正整數 n 滿足方程 $\left[\frac{n}{44}\right]=\left[\frac{n}{45}\right]$？（7 分）

Let $[x]$ denote the largest integer not exceeding x. For example, $[2.1]=2$, $[4]=4$ and $[5.7]=5$. How many positive integers n satisfy the equation $\left[\frac{n}{44}\right]=\left[\frac{n}{45}\right]$? (7 marks)

全卷完

END OF PAPER