第十六屆培正數學邀請賽（2017 年）

16th Pui Ching Invitational Mathematics Competition (2017)

初賽（中一組）

Heat Event (Secondary 1)

時限：1 小時 15 分

Time allowed: 1 hour 15 minutes

參賽者須知：

Instructions to Contestants:

(a) 本卷共設 20 題，總分為 100 分。

There are 20 questions in this paper and the total score is 100.

(b) 除特別指明外，本卷內的所有數均為十進制。

Unless otherwise stated, all numbers in this paper are in decimal system.

(c) 作答時，每題的答案均須以 0 至 9999 之間的整數表示。依照答題紙上的指示填寫答案，毋須呈交計算步驟。

Each answer must be given in the form of an integer between 0 and 9999. Follow the instructions on the answer sheet to enter the answers. You are not required to hand in your steps of working.

(d) 不得使用計算機。

The use of calculators is not allowed.

(e) 本卷的附圖不一定依比例繪成。

The diagrams in this paper are not necessarily drawn to scale.

注意：每題的答案均須以 0 至 9999 之間的整數表示，如有需要應以上述範圍內最接近正確答案的整數回答。如有兩個這樣的整數與正確答案同樣接近，則以「四捨五入」的原則取較大的整數。請細閱答題紙上的指示。

Note: Each answer must be given in the form of an integer between 0 and 9999. Where necessary, the answer should be rounded off to the nearest integer in the above range. Read the instructions on the answer sheet in detail.

1. 現有 10 個編號為 1 至 10 的球。有多少種方法從中選出 3 個球，使得它們的編號是連續正整數？ （3 分）

   There are 10 balls labelled 1 to 10. How many ways are there to choose 3 balls such that their labels are consecutive positive integers? (3 marks)

2. 有多少個兩位正整數是 5 的倍數，但不包含數字「5」？ （3 分）

   How many two-digit positive integers are multiples of 5 but do not contain the digit '5'? (3 marks)

3. 一個長方體其中三個面的面積分別是 6、10 和 15。求它的體積。 （3 分）

   The areas of three of the faces of a cuboid are 6, 10 and 15 respectively. Find the volume of the cuboid. (3 marks)

4. 在一個五邊形中，最多有多少隻內角是直角？ （3 分）

   At most how many interior angles of a pentagon can be right angles? (3 marks)

5. 在一個 4×4 方格表中，每格均有一個正整數，使得每行和每列的 4 個數均互不相同。若方格表 16 個正整數之和為 S，求 S 的最小可能值。 （4 分）

   A positive integer is put in each cell of a 4×4 grid such that the 4 numbers in each row and column are pairwise distinct. If the sum of the 16 numbers in the grid is S, find the smallest possible value of S. (4 marks)

6. 正整數 m 和 n 之和為 46，且它們的最大公因數為 d。求 d 的最大可能值。 （4 分）

   The sum of the positive integers m and n is 46, and their H.C.F. is d. Find the greatest possible value of d. (4 marks)

7. 一家水果店售賣蘋果和橙。蘋果每個售 4 元，橙每個售 5 元。穎妮在水果店花了 n 元，其中 n 是不超過 20 的正整數。她所買水果的組合有多少個不同的可能性？（4 分）

A fruit store sells apples and oranges. The apples are sold at \$4 each and oranges \$5 each. Winnie spent n dollars in the store, where n is a positive integer not exceeding 20. How many different possible combinations are there for the fruits she bought? (4 marks)

8. 小莊在計算兩個一位正整數的乘積 $a\times b$ 時，誤把 a 看成另一個一位正整數 c，結果得出的答案與正確答案相差了 x。求 x 的最大可能值。（4 分）

When computing the product $a\times b$ of two one-digit positive integers, John mistakenly read a as another one-digit positive integer c. As a result, his answer differed from the correct answer by x. Find the greatest possible value of x. (4 marks)

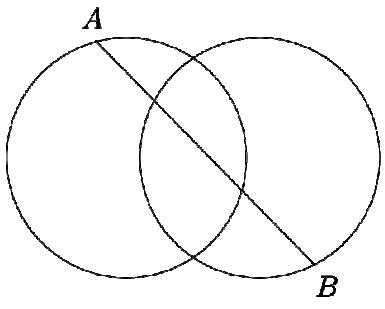
9. 在某個數列中，第 mn 項總是等於第 $m+n$ 項，其中 m、n 為任意正整數（例如：取 $m=5$ 和 $n=7$ 可知第 35 項等於第 12 項）。若數列的第一項為 a 而第四項為 4321，求 a 的最小可能值。（5 分）

In a sequence, the mn-th term is equal to the $(m+n)$-th term for any positive integers m and n. (For example, by taking $m=5$ and $n=7$, we know that the 35th term is equal to the 12th term.) If the first term of the sequence is a while the fourth term is 4321, find the smallest possible value of a. (5 marks)

10. 求最小的正整數 n，使得 $n+28$ 是平方數，而 $24n$ 是立方數。（5 分）

Find the smallest positive integer n such that $n+28$ is a square number while $24n$ is a cubic number. (5 marks)

11. 現有兩個直徑為 d 的圓形，其中每個圓的圓心均位於另一個圓上。A 和 B 分別位於兩圓上，使得 $AB=246$。求 d 的最小可能值。（5 分）



There are two circles of diameter d such that the centre of each circle lies on the other circle. A and B are points on the two circles respectively such that $AB=246$. Find the smallest possible value of d. (5 marks)

12. 在所示的算式中，每個字母代表一個由 0 至 9 的不同數字。求 FOUR 所代表的四位數的最大可能值。（5 分）

$$\begin{array}{cccc} & O & N & E \\ + & F & O & U & R \\ \hline F & I & V & E \end{array}$$

In the addition shown, each letter represents a different digit from 0 to 9. Find the greatest possible value of the four-digit number represented by FOUR. (5 marks)

13. 現有 9 個正整數，若我們將當中某兩個數加起來，可得到若干個不同的和。已知得到的最小的和是 123，最大的和是 456。求 9 個正整數之和的最小可能值。（6 分）

There are 9 positive integers. By adding any two of the numbers, several different sums can be obtained. It is known that the smallest sum obtained is 123, while the greatest sum is 456. Find the smallest possible value of the sum of the 9 positive integers. (6 marks)

14. 某次測驗共有 4 道題，答對率分別是 97%、81%、79% 和 65%。若有 $n\%$ 的考生取得滿分，求 n 的最小可能值。（6 分）

There are 4 questions in a test, with 97%, 81%, 79% and 65% of the candidates correctly answering each question respectively. If $n\%$ of the candidates got full marks in the test, find the smallest possible value of n. (6 marks)

15. 方程 $(2m+1)(n+2)=1800$ 有多少組正整數解 (m,n)？（6 分）

How many sets of positive integer solutions (m,n) are there to the equation $(2m+1)(n+2)=1800$? (6 marks)

16. 有多少種方法在 2×2 方格表的每格填上一個正整數，使得四個數之積等於 120，且每行和每列的兩數之和均小於 10？（6 分）

How many ways are there to put a positive integer in each cell of a 2×2 grid, such that the product of the four numbers is equal to 120, and that the sum of the two numbers in each row and column is less than 10? (6 marks)

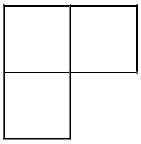
17. 設實數 a、b 和 c 滿足 $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}=-\frac{k}{100}$。求 k 的所有可能值之和。 （7 分）

Suppose real numbers a, b and c satisfy $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}=-\frac{k}{100}$. Find the sum of all possible values of k. (7 marks)

18. 對正整數 k，設 $S(k)$ 表示 k 的數字之和，例如：$S(2017)=2+0+1+7=10$。若 $n+S(n)+S(S(n))=2^4+0^4+1^4+7^4$，求 n 的所有可能值之和。 （7 分）

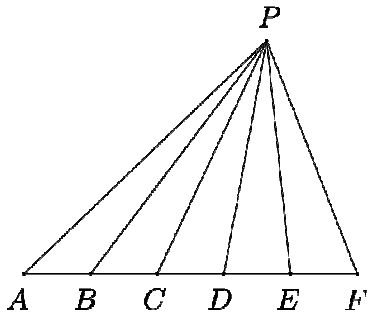
For positive integer k, let $S(k)$ denote the sum of digits of k, e.g. $S(2017)=2+0+1+7=10$. If $n+S(n)+S(S(n))=2^4+0^4+1^4+7^4$, find the sum of all possible values of n. (7 marks)

19. 現有一個 4×4 方格表。我們需使用 5 個面積為 3 個平方單位的 L 形（如圖所示）覆蓋方格表（可以把 L 形旋轉使用），使得恰好有一格沒被覆蓋。那麼，共有多少種不同的覆蓋方法？ （7 分）



A 4×4 grid is to be covered by 5 copies of an L-shape with area 3 square units (as shown in the figure) (the L-shape can be rotated) so that exactly one cell is not covered. In how many different ways can this be done? (7 marks)

20. 圖中，A、B、C、D、E、F 位於同一直線上，使得 $AB=BC=CD=DE=EF=1$。若 $PC=\pi$ 而 $PF=\sqrt{59-5\pi^2}$，求 $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2+PE^2+PF^2$ 的值。 （7 分）



In the figure, A, B, C, D, E, F lie on the same straight line with $AB=BC=CD=DE=EF=1$. If $PC=\pi$ and $PF=\sqrt{59-5\pi^2}$, find the value of $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2+PE^2+PF^2$. (7 marks)

全卷完

END OF PAPER