

第十五屆培正數學邀請賽（2016 年）

15th Pui Ching Invitational Mathematics Competition (2016)

初賽（中三組）

Heat Event (Secondary 3)

時限：1 小時 15 分

Time allowed: 1 hour 15 minutes

參賽者須知：

Instructions to Contestants:

- (a) 本卷共設 20 題，總分為 100 分。

There are 20 questions in this paper and the total score is 100.

- (b) 除特別指明外，本卷內的所有數均為十進制。

Unless otherwise stated, all numbers in this paper are in decimal system.

- (c) 作答時，每題的答案均須以 0 至 9999 之間的整數表示。依照答題紙上的指示填寫答案，毋須呈交計算步驟。

Each answer must be given in the form of an integer between 0 and 9999. Follow the instructions on the answer sheet to enter the answers. You are not required to hand in your steps of working.

- (d) 不得使用計算機。

The use of calculators is not allowed.

- (e) 本卷的附圖不一定依比例繪成。

The diagrams in this paper are not necessarily drawn to scale.

注意：每題的答案均須以 0 至 9999 之間的整數表示，如有需要應以上述範圍內最接近正確答案的整數回答。如有兩個這樣的整數與正確答案同樣接近，則以「四捨五入」的原則取較大的整數。請細閱答題紙上的指示。

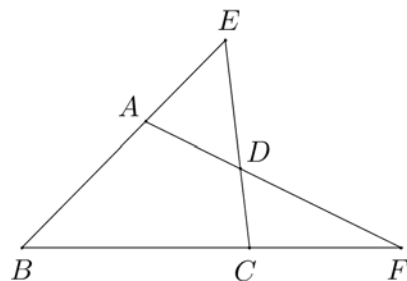
Note: Each answer must be given in the form of an integer between 0 and 9999. Where necessary, the answer should be rounded off to the nearest integer in the above range. Read the instructions on the answer sheet in detail.

1. 有多少個三位數的每位數字均是 4 的倍數？ (3 分)

How many three-digit numbers are there in which every digit is a multiple of 4? (3 marks)

2. 圖中， $ABCD$  是凸四邊形， $E$  是  $BA$  和  $CD$  延長線的交點， $F$  是  $BC$  和  $AD$  延長線的交點。若  $\angle ABC = 45^\circ$ 、 $\angle CDA = 110^\circ$ 、 $\angle BEC = x^\circ$  和  $\angle AFB = y^\circ$ ，求  $x + y$  的值。

In the figure,  $ABCD$  is a convex quadrilateral.  $E$  is the intersection of the extensions of  $BA$  and  $CD$ , while  $F$  is the intersection of the extensions of  $BC$  and  $AD$ . If  $\angle ABC = 45^\circ$ ,  $\angle CDA = 110^\circ$ ,  $\angle BEC = x^\circ$  and  $\angle AFB = y^\circ$ , find the value of  $x + y$ .



(3 分)

(3 marks)

3. 現有 9 張咭片，當中紅色、藍色和綠色各佔 3 張。每種顏色的 3 張咭片上分別寫上數字 1、2 和 3。最少需隨機抽出多少張咭片，才可確保當中必定有兩張咭片顏色相同或數字相同？ (3 分)

There are 9 cards, with 3 cards having each of the colours red, blue and green. On the 3 cards of each colour, the numbers 1, 2 and 3 are written respectively. At least how many cards should be chosen randomly to ensure that there must be two cards of the same colour or the same number?

(3 marks)

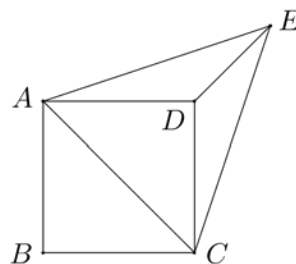
4. 若非負整數  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  滿足  $b < a + c$  及  $c < b + d$ ，求  $a + b + c + d$  的最小可能值。 (3 分)

If the nonnegative integers  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  satisfy  $b < a + c$  and  $c < b + d$ , find the smallest possible value of  $a + b + c + d$ .

(3 marks)

5. 圖中， $ABCD$  是邊長為  $12\sqrt{2}$  的正方形， $E$  是正方形外的一點，使得  $ACE$  是等邊三角形，且  $D$  位於  $\triangle ACE$  內。求  $DE$  的長度。

In the figure,  $ABCD$  is a square of side length  $12\sqrt{2}$ .  $E$  is a point outside the square such that  $ACE$  is an equilateral triangle and  $D$  lies inside  $\triangle ACE$ . Find the length of  $DE$ .



(4 分)

(4 marks)

6. 設  $x$ 、 $y$  為不同的正實數，且  $a$ 、 $b$  分別為  $x$  和  $y$  的倒數。若  $\frac{a+b}{a-b} = 6$ ，求  $\frac{2x}{y-x}$  的值。

(4 分)

Let  $x, y$  be distinct positive real numbers, and  $a, b$  be the reciprocals of  $x$  and  $y$  respectively. If  $\frac{a+b}{a-b} = 6$ , find the value of  $\frac{2x}{y-x}$ .

(4 marks)

7. 在直角座標平面上， $x$  座標和  $y$  座標均為整數且  $x+y$  為偶數的點稱為「偶格點」。那麼，有多少個「偶格點」 $(x, y)$  同時滿足  $1 \leq x \leq 9$  及  $1 \leq y \leq 7$ ？

(4 分)

On the Cartesian plane, a point is called an 'even lattice point' if both its  $x$ -coordinate and  $y$ -coordinate are integers and  $x+y$  is even. How many 'even lattice points'  $(x, y)$  satisfy both  $1 \leq x \leq 9$  and  $1 \leq y \leq 7$ ?

(4 marks)

8. 現有 5 個兩位數，當中至少 4 個是質數。若該 5 個兩位數的 10 個數字恰好包括 0 至 9，求這 5 個數之和。

(4 分)

There are 5 two-digit numbers, at least 4 of which are prime. If the 10 digits of the 5 two-digit numbers consist of each of 0 to 9, find the sum of these 5 numbers.

(4 marks)

9. 在首 100 個正整數中，有多少個有最少三個不同的質因數？

(5 分)

How many of the first 100 positive integers have at least three distinct prime factors?

(5 marks)

10. 已知  $n = \overline{ABCD}$  是四位平方數，其中  $\overline{AB}$  及  $\overline{CD}$  均是兩位平方數。求  $n$  的值。

(5 分)

Given that  $n = \overline{ABCD}$  is a four-digit square number, where  $\overline{AB}$  and  $\overline{CD}$  are both two-digit square numbers. Find the value of  $n$ .

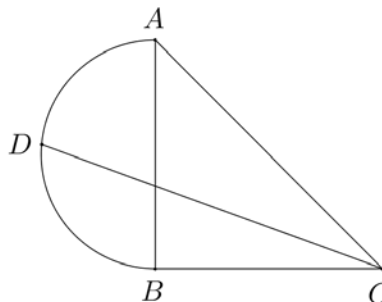
(5 marks)

11. 若  $a, b, c, d$  四個數等於 2、4、6、8（不一定按此順序），求  $ab+bc+cd+da$  的最大可能值。 (5 分)

If the four numbers  $a, b, c, d$  are equal to 2, 4, 6, 8 (not necessarily in this order), find the greatest possible value of  $ab+bc+cd+da$ . (5 marks)

12. 設  $ABC$  是等腰直角三角形，其中  $\angle ABC = 90^\circ$  且  $AC = 20$ 。以  $AB$  為直徑向  $\triangle ABC$  外作一半圓。 $D$  是半圓上的一點，使得  $AD = BD$ 。求  $CD$  的長度。

Let  $ABC$  be an isosceles right-angled triangle where  $\angle ABC = 90^\circ$  and  $AC = 20$ . Construct a semicircle outside  $\triangle ABC$  using  $AB$  as the diameter.  $D$  is a point on the semicircle such that  $AD = BD$ . Find the length of  $CD$ .



(5 分)

(5 marks)

13. 某個遊戲設 10 道題，參加者從第一道題開始回答，每題答對可得 1 分，答錯或棄權則不能回答下一題（例如答錯第 2 題便不能回答第 3 題，需跳到第 4 題）。若某位參加者得到 3 分，他答對的題目有多少個可能的組合？ (6 分)

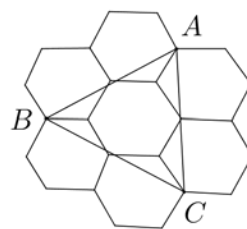
In a game, there are 10 questions. If a participant answers a question correctly, he gets 1 point. If a question is wrongly answered or unattempted, the next question must be skipped. (For example, if Question 2 is wrongly answered, then Question 3 must be skipped and the participant will answer Question 4 next.) If a participant got 3 points, how many different combinations of the correctly answered questions are there? (6 marks)

14. 設  $[x]$  代表不超過  $x$  的最大整數，例如  $[2.1] = 2$ ， $[4] = 4$  和  $[5.7] = 5$ 。若  $\left\lfloor \frac{2016}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5n}{2016} \right\rfloor = n+1$ ，且  $n$  是正整數，求  $n$  的值。 (6 分)

Let  $[x]$  denote the largest integer not exceeding  $x$ . For example,  $[2.1] = 2$ ,  $[4] = 4$  and  $[5.7] = 5$ . If  $\left\lfloor \frac{2016}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5n}{2016} \right\rfloor = n+1$  where  $n$  is a positive integer, find the value of  $n$ . (6 marks)

15. 附圖由 7 個邊長為 1 的正六邊形組成， $A$ 、 $B$  和  $C$  為其中三個頂點。若  $\triangle ABC$  的面積為  $S$ ，求  $S^2$  的值。

The figure is composed of 7 regular hexagons with side length 1.  $A$ ,  $B$  and  $C$  are three of the vertices. If the area of  $\triangle ABC$  is  $S$ , find the value of  $S^2$ .

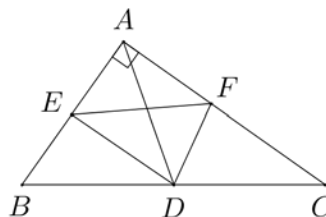


(6 分)

(6 marks)

16. 給定  $\triangle ABC$  及邊  $BC$  上一點  $D$ ，其中  $\angle BAC = 90^\circ$  及  $AD = 8$ ， $E$  和  $F$  為邊  $AB$  和  $AC$  上的不定點，求  $DE + EF + FD$  的最小可能值。

Given  $\triangle ABC$  and a point  $D$  on side  $BC$ , where  $\angle BAC = 90^\circ$  and  $AD = 8$ . If  $E$  and  $F$  are movable points on sides  $AB$  and  $AC$ , find the smallest possible value of  $DE + EF + FD$ .



(6 分)

(6 marks)

17. 若 2016 以  $n$  進制表示時個位數字是 6，求  $n$  的所有可能值之和。

(7 分)

When 2016 is written in base- $n$  notation, the unit digit is 6. Find the sum of all possible values of  $n$ .

(7 marks)

18. 設  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為不超過 10 的正整數，且滿足不等式  $a^2 < bc$  及  $b^2 < ca$ 。那麼， $(a, b, c)$  有多少組不同的可能值？

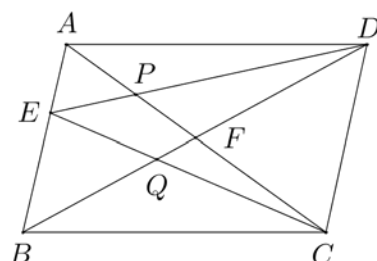
(7 分)

Let  $a$ ,  $b$ ,  $c$  be positive integers not exceeding 10 and satisfying the inequalities  $a^2 < bc$  and  $b^2 < ca$ . How many different sets of possible values of  $(a, b, c)$  are there?

(7 marks)

19. 設  $ABCD$  是面積為 600 的平行四邊形， $E$  是邊  $AB$  上的一點。設  $AC$  與  $BD$  相交於  $F$ ， $DE$  與  $AC$  相交於  $P$ ，且  $CE$  與  $BD$  相交於  $Q$ 。求四邊形  $EQFP$  的面積的最大可能值。

Let  $ABCD$  be a parallelogram with area 600, and  $E$  be a point on side  $AB$ . Suppose  $AC$  meets  $BD$  at  $F$ ,  $DE$  meets  $AC$  at  $P$ , and  $CE$  meets  $BD$  at  $Q$ . Find the greatest possible value of the area of the quadrilateral  $EQFP$ .



(7 分)

(7 marks)

20. 一張正方形咭紙被剪成  $n$  個三角形，其中每個三角形的三隻內角組成等差數列。已知  $n$  有很多不同的可能值。若把  $n$  的所有可能值從小至大排列，第 100 項是甚麼？ (7 分)

A piece of square cardboard is cut into  $n$  triangles, each of which has its three interior angles forming an arithmetic sequence. It is known that there are many different possible values of  $n$ . If all possible values of  $n$  are arranged in ascending order, what is the 100th term? (7 marks)

全卷完

**END OF PAPER**