第十五屆培正數學邀請賽（2016 年）

15th Pui Ching Invitational Mathematics Competition (2016)

初賽（中二組）

Heat Event (Secondary 2)

時限：1 小時 15 分

Time allowed: 1 hour 15 minutes

參賽者須知：

Instructions to Contestants:

(a) 本卷共設 20 題，總分為 100 分。

There are 20 questions in this paper and the total score is 100.

(b) 除特別指明外，本卷內的所有數均為十進制。

Unless otherwise stated, all numbers in this paper are in decimal system.

(c) 作答時，每題的答案均須以 0 至 9999 之間的整數表示。依照答題紙上的指示填寫答案，毋須呈交計算步驟。

Each answer must be given in the form of an integer between 0 and 9999. Follow the instructions on the answer sheet to enter the answers. You are not required to hand in your steps of working.

(d) 不得使用計算機。

The use of calculators is not allowed.

(e) 本卷的附圖不一定依比例繪成。

The diagrams in this paper are not necessarily drawn to scale.

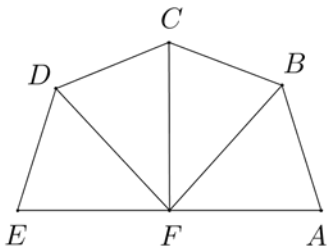
注意：每題的答案均須以 0 至 9999 之間的整數表示，如有需要應以上述範圍內最接近正確答案的整數回答。如有兩個這樣的整數與正確答案同樣接近，則以「四捨五入」的原則取較大的整數。請細閱答題紙上的指示。

Note: Each answer must be given in the form of an integer between 0 and 9999. Where necessary, the answer should be rounded off to the nearest integer in the above range. Read the instructions on the answer sheet in detail.

1. 有多少個三位數的每位數字均是 3 的倍數？ （3 分）

   How many three-digit numbers are there in which every digit is a multiple of 3? (3 marks)

2. 如圖所示，F 是五邊形 $ABCDE$ 的邊 EA 上的一點。若 $AF = BF = CF = DF = EF$ 及 $AB = BC = CD = DE$，且 $\angle DFE = x°$，求 x 的值。 （3 分）



   In the figure, F is a point on side EA of the pentagon $ABCDE$. If $AF = BF = CF = DF = EF$ and $AB = BC = CD = DE$, and $\angle DFE = x°$, find the value of x. (3 marks)

3. 現有 9 張咭片，當中紅色、藍色和綠色各佔 3 張。每種顏色的 3 張咭片上分別寫上數字 1、2 和 3。最多可以選出多少張咭片，使得當中沒有兩張咭片顏色相同或數字相同？ （3 分）

   There are 9 cards, with 3 cards having each of the colours red, blue and green. On the 3 cards of each colour, the numbers 1, 2 and 3 are written respectively. At most how many cards can be selected without having two cards of the same colour or the same number? (3 marks)

4. 若非負整數 a、b、c、d 滿足 $b < a + c$ 及 $c < b + d$，求 $a + b + c + d$ 的最小可能值。 （3 分）

   If the nonnegative integers a, b, c, d satisfy $b < a + c$ and $c < b + d$, find the smallest possible value of $a + b + c + d$. (3 marks)

5. 有多少個三位數的數字之積是 6？ （4 分）

   How many three-digit numbers have product of digits 6? (4 marks)

6. 若把個位是 6，且十位是奇數的正整數由小至大排列，則 2016 是第幾項？ （4 分）

If all positive integers with unit digit 6 and tens digit odd are arranged in ascending order, which term is 2016? (4 marks)

7. 若在算式 8□4□2□1 的方格中填上運算符號「＋」、「－」、「×」或「÷」（可重複使用），求所得出答案的最大可能值和最小可能值之差。 （4 分）

If the arithmetic operators '+', '−', '×' or '÷' are inserted into the boxes of the expression 8□4□2□1 (each operator can be used more than once), find the difference between the greatest possible value and the smallest possible value of the answer obtained. (4 marks)

8. 一個圓形時鐘的秒針長 x 厘米。若秒針每秒所劃過的區域面積是 $\frac{12\pi}{5}$ 平方厘米，求 x 的值。 （4 分）

The second hand of a circular clock has length x cm. If the area of the region swept by the second hand is $\frac{12\pi}{5}$ cm^2 per second, find the value of x. (4 marks)

9. 設 n 是四位數。若把 n 的數字重新排列（不允許以「0」開首），可得到不同的四位數。若其中兩個可得到的四位數為 a 和 b，求 $a-b$ 的最大可能值。 （5 分）

Let n be a four-digit number. By rearranging the digits of n ('0' is not allowed to be the leading digit), one can get different four-digit numbers. If a and b are two numbers that can be so obtained, find the greatest possible value of $a-b$. (5 marks)

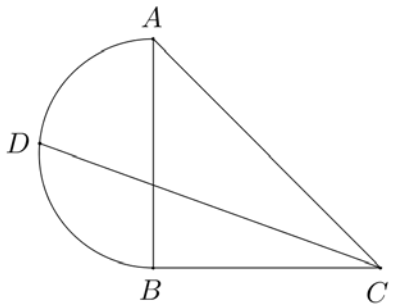
10. 現有兩行正整數。第一行的首項是 1，之後每項均等於該行前面所有數之和再加 1；第二行的首項是 1，之後每項均等於該行前面所有數之和再加 2。求兩行數的第 10 項之差。 （5 分）

There are two rows of positive integers. The first term of the first row is 1, and each subsequent term is the sum of all previous numbers in the same row plus 1. The first term of the second row is 1, and each subsequent term is the sum of all previous numbers in the same row plus 2. Find the difference between the 10th terms of the two rows. (5 marks)

11. 某兩位數等於它十位數字的立方與它個位數字的平方之和。求此數。 （5 分）

A two-digit number is equal to the sum of the cube of its tens digit and the square of its unit digit. Find this number. (5 marks)

12. 設 ABC 是等腰直角三角形，其中 $\angle ABC = 90°$ 且 $AC = 20$。以 AB 為直徑向 ΔABC 外作一半圓。D 是半圓上的一點，使得 $AD = BD$。求 CD 的長度。 （5 分）

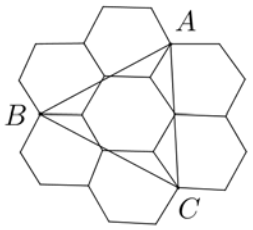


Let ABC be an isosceles right-angled triangle where $\angle ABC = 90°$ and $AC = 20$. Construct a semicircle outside ΔABC using AB as the diameter. D is a point on the semicircle such that $AD = BD$. Find the length of CD. (5 marks)

13. 若 a、b、c、d 四個數等於 2、4、6、8（不一定按此順序），求 $ab + bc + bd + cd$ 的最大可能值。 （6 分）

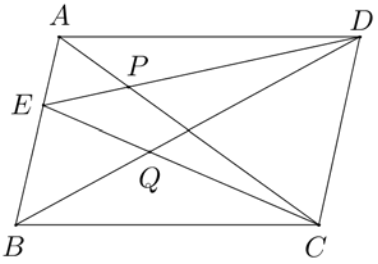
If the four numbers a, b, c, d are equal to 2, 4, 6, 8 (not necessarily in this order), find the greatest possible value of $ab + bc + bd + cd$. (6 marks)

14. 附圖由 7 個邊長為 1 的正六邊形組成，A、B 和 C 為其中三個頂點。若 ΔABC 的面積為 S，求 S^2 的值。 （6 分）



The figure is composed of 7 regular hexagons with side length 1. A, B and C are three of the vertices. If the area of ΔABC is S, find the value of S^2. (6 marks)

15. 設 $ABCD$ 是面積為 600 的平行四邊形，E 是邊 AB 上的一點，使得 $AE : EB = 1 : 2$。設 DE 與 AC 相交於 P，CE 與 BD 相交於 Q，求 ΔAPE 及 ΔBQE 的面積之和。 （6 分）



Let $ABCD$ be a parallelogram with area 600 and E be a point on side AB such that $AE : EB = 1 : 2$. Suppose DE and AC meet at P, CE and BD meet at Q. Find the sum of the areas of ΔAPE and ΔBQE. (6 marks)

16. 在所示的算式中，每個字母代表一個由 0 至 9 的不同數字。求 NINE 所代表的四位數的最大可能值。 （6 分）

$$\begin{array}{cccc} & F & I & V & E \\ + & F & O & U & R \\ \hline & N & I & N & E \end{array}$$

In the addition shown, each letter represents a different digit from 0 to 9. Find the greatest possible value of the four-digit number represented by NINE. (6 marks)

17. 若 2016 以 n 進制表示時個位數字是 3，求 n 的所有可能值之和。 （7 分）

When 2016 is written in base-n notation, the unit digit is 3. Find the sum of all possible values of n. (7 marks)

18. 設 a、b、c 為不超過 10 的正整數，且滿足不等式 $a^2 < bc$ 及 $b^2 < ca$。那麼，(a,b,c) 有多少組不同的可能值？ （7 分）

Let a, b, c be positive integers not exceeding 10 and satisfying the inequalities $a^2 < bc$ and $b^2 < ca$. How many different sets of possible values of (a,b,c) are there? (7 marks)

19. 求最接近 $\sqrt{1\times 2}+\sqrt{2\times 3}+\cdots+\sqrt{16\times 17}$ 的整數。 （7 分）

Find the integer closest to $\sqrt{1\times 2}+\sqrt{2\times 3}+\cdots+\sqrt{16\times 17}$. (7 marks)

20. 一張正方形咭紙被剪成 n 個三角形，其中每個三角形的三隻內角組成等差數列。已知 n 有很多不同的可能值。若把 n 的所有可能值從小至大排列，第 100 項是甚麼？ （7 分）

A piece of square cardboard is cut into n triangles, each of which has its three interior angles forming an arithmetic sequence. It is known that there are many different possible values of n. If all possible values of n are arranged in ascending order, what is the 100th term? (7 marks)

全卷完

END OF PAPER