第十四屆培正數學邀請賽（2015年）

14th Pui Ching Invitational Mathematics Competition (2015)

初賽（中四組）

Heat Event (Secondary 4)

時限：1 小時 15 分

Time allowed: 1 hour 15 minutes

參賽者須知：

Instructions to Contestants:

(a) 本卷共設 20 題，總分爲 100 分。

There are 20 questions in this paper and the total score is 100.

(b) 除特別指明外，本卷內的所有數均爲十進制。

Unless otherwise stated, all numbers in this paper are in decimal system.

(c) 作答時，每題的答案均須以 0 至 9999 之間的整數表示。依照答題紙上的指示填寫答案，毋須呈交計算步驟。

Each answer must be given in the form of an integer between 0 and 9999. Follow the instructions on the answer sheet to enter the answers. You are not required to hand in your steps of working.

(d) 不得使用計算機。

The use of calculators is not allowed.

(e) 本卷的附圖不一定依比例繪成。

The diagrams in this paper are not necessarily drawn to scale.

注意：每題的答案均須以 0 至 9999 之間的整數表示，如有需要應以上述範圍內最接近正確答案的整數回答。如有兩個這樣的整數與正確答案同樣接近，則以「四捨五入」的原則取較大的整數。請細閱答題紙上的指示。

Note: Each answer must be given in the form of an integer between 0 and 9999. Where necessary, the answer should be rounded off to the nearest integer in the above range. Read the instructions on the answer sheet in detail.

1. 若 n 個質數之和等於 2015，求 n 的最小可能值。（3分）

   If the sum of n prime numbers is 2015, find the smallest possible value of n. (3 marks)

2. 求多項式 $(x^2+13)(x-2)$ 除以 $x-6$ 時的餘數。（3分）

   Find the remainder when the polynomial $(x^2+13)(x-2)$ is divided by $x-6$. (3 marks)

3. 若 n 是三位偶數，且其數字之和不小於 10，求 n 的最小可能值。（3分）

   If n is a three-digit even number whose sum of digits is not less than 10, find the minimum possible value of n. (3 marks)

4. 求方程 $x^2-2015x+1=0$ 的最大實根。（3分）

   Find the greatest real root to the equation $x^2-2015x+1=0$. (3 marks)

5. 若把數字 0、0、0、1、2、3 重新排列，可以組成多少個不能被 10 整除的六位數？（4分）

   How many six-digit numbers not divisible by 10 can be formed by permuting the digits 0, 0, 0, 1, 2, 3? (4 marks)

6. 若 $\sin(180°-x°)=2\cos^2 x°-1$，其中 $0\le x\le 360$，求 x 的所有可能值之和。（4分）

   If $\sin(180°-x°)=2\cos^2 x°-1$ where $0\le x\le 360$, find the sum of all possible values of x. (4 marks)

7. 有多少個四位正整數可被 7 整除？（4分）

   How many four-digit positive integers are divisible by 7? (4 marks)

8. 某三角形三條邊的長度爲 3、5 和 7。若它最大的一隻內角是 $x°$，求 x。 （4分）

A triangle has side lengths 3, 5 and 7. If its largest interior angle is $x°$, find x. (4 marks)

9. 有多少個四位正整數的數字之積爲 60？ （5分）

How many four-digit positive integers have product of digits 60? (5 marks)

10. 一個三角形的其中兩邊長度爲 10。若其面積是 40，求它的周界的最大可能值。 （5分）

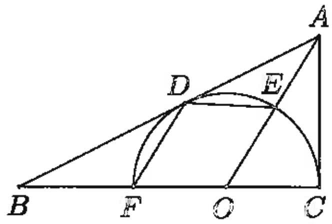
A triangle has two sides with length 10. If its area is 40, what is its greatest possible perimeter? (5 marks)

11. 設 n 爲正整數，且 $\log(n-30)+\log(50-n)<2$。那麼，n 有多少個不同的可能值？ （5分）

If n is a positive integer such that $\log(n-30)+\log(50-n)<2$, how many different possible values of n are there? (5 marks)

12. 給定 ΔABC，其中 $\angle ACB=90°$ 和 $\angle ABC=14°$。點 O 在邊 BC 上，以 O 爲中心的半圓與 AC 相切於 C、與 AB 相切於 D。若線段 AO 與半圓相交於 E，CF 爲半圓的直徑，並設 $\angle EDF=x°$，求 x 的值。 （5分）

Given ΔABC where $\angle ACB=90°$ and $\angle ABC=14°$. Point O lies on side BC. The semi-circle with centre O is tangent to AC at C, and is tangent to AB at D. Suppose segment AO meets the semi-circle at E and CF is the diameter of the semi-circle. Let $\angle EDF=x°$. Find the value of x. (5 marks)

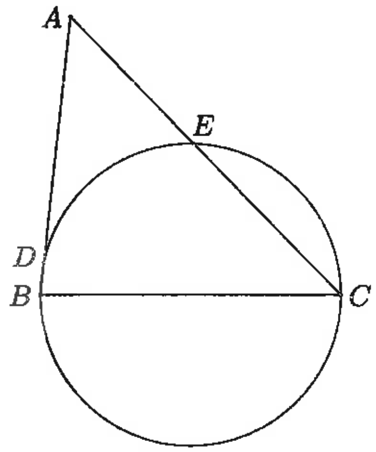


13. 設 n 爲兩位正整數，其兩位數字均非零。若把 n 的兩位數字對調，可得正整數 m。若 m 和 n 的最大公因數爲 1，則 n 有多少個不同的可能值？ （6分）

Let n be a two-digit positive integer whose both digits are nonzero. By switching the two digits of n, one obtains the positive integer m. Given that the H.C.F. of m and n is equal to 1, how many different possible values of n are there? (6 marks)

14. 以 BC 爲直徑的圓分別與 ΔABC 的邊 AB 和 AC 相交於 D 和 E。若 $BC=\sqrt{901}$，$BD=1$ 及 $AD=16$，求 CE 的長度。（6分）

The circle with diameter BC meets the sides AB and AC of ΔABC at D and E respectively. If $BC=\sqrt{901}$, $BD=1$ and $AD=16$, find the length of CE. (6 marks)



15. 一張遊戲咭上印有一個 4×4 方格表，參加者需把整數 1 至 16 分別填進方格表的 16 個格子，使得每個格子恰好有一個數。然後，主持人會從 1 至 16 隨機抽出 5 個幸運號碼。如果有其中 4 個幸運號碼位於同一行或同一列，參加者便可中獎。若中獎的概率以最簡分數表示時爲 $\frac{a}{b}$，求 $a+b$ 的值。（6分）

A 4×4 table is printed on a game card. The participant has to fill in the numbers 1 to 16 into the 16 cells of the table such that there is exactly one number in each cell. The master of the game will then randomly draws 5 lucky numbers from 1 to 16. If 4 of the lucky numbers lie in the same row or the same column, the participant can win a prize. If the probability of winning a prize is $\frac{a}{b}$ in lowest form, find the value of $a+b$. (6 marks)

16. 在聖誕聯歡會上，5 名小孩進行禮物交換。他們每人先將一份禮物交給老師，然後老師隨機將禮物分配給小孩。若恰好有一名小孩得到自己禮物的概率以最簡分數表示時爲 $\frac{a}{b}$，求 $a+b$ 的值。（6分）

In a Christmas party, 5 kids are going to exchange presents. Each of them first gives a present to the teacher, and then the teacher randomly distributes the presents back to the kids. If the probability that exactly one kid gets back his own present is $\frac{a}{b}$ in lowest form, find the value of $a+b$. (6 marks)

17. 若正整數 m 和 n 滿足 $\frac{23}{50}<\frac{m}{n}<\frac{64}{139}$，求 n 的最小可能值。（7分）

If positive integers m and n satisfy $\frac{23}{50}<\frac{m}{n}<\frac{64}{139}$, find the smallest possible value of n. (7 marks)

18. 若一個正整數的平方的最後三位數字相同且非零，則該正整數稱爲「好數」，例如：因爲 $38^2=1444$，故 38 是「好數」。若把所有「好數」從小至大排列，求當中第二個數。（7分）

If the last three digits of the square of a positive integer are the same and nonzero, we say that the positive integer is 'good'. For example, since $38^2=1444$, so 38 is 'good'. If we arrange all 'good' numbers in ascending order, what is the second number? (7 marks)

19. 求 $\frac{99^3+100^3}{1^3+100^3}+\frac{97^3+99^3}{2^3+99^3}+\frac{95^3+98^3}{3^3+98^3}+\cdots+\frac{1^3+51^3}{50^3+51^3}$ 的值。（7分）

Find the value of $\frac{99^3+100^3}{1^3+100^3}+\frac{97^3+99^3}{2^3+99^3}+\frac{95^3+98^3}{3^3+98^3}+\cdots+\frac{1^3+51^3}{50^3+51^3}$. (7 marks)

20. 設 x、y、z 爲實數，其中 $(x-15)^2+(y-20)^2\le 49$ 而 $10y=zx$。求 z 的最大可能值。（7分）

Let x, y, z be real numbers such that $(x-15)^2+(y-20)^2\le 49$ and $10y=zx$. Find the greatest possible value of z. (7 marks)

全卷完

END OF PAPER