第十四屆培正數學邀請賽（2015 年）

14th Pui Ching Invitational Mathematics Competition (2015)

初賽（中二組）

Heat Event (Secondary 2)

時限：1 小時 15 分

Time allowed: 1 hour 15 minutes

參賽者須知：

Instructions to Contestants:

(a) 本卷共設 20 題，總分為 100 分。

There are 20 questions in this paper and the total score is 100.

(b) 除特別指明外，本卷內的所有數均為十進制。

Unless otherwise stated, all numbers in this paper are in decimal system.

(c) 作答時，每題的答案均須以 0 至 9999 之間的整數表示。依照答題紙上的指示填寫答案，毋須呈交計算步驟。

Each answer must be given in the form of an integer between 0 and 9999. Follow the instructions on the answer sheet to enter the answers. You are not required to hand in your steps of working.

(d) 不得使用計算機。

The use of calculators is not allowed.

(e) 本卷的附圖不一定依比例繪成。

The diagrams in this paper are not necessarily drawn to scale.

1. 有多少個小於 50 的正整數，其數字之和是 3 的倍數？ （3分）

   How many positive integers smaller than 50 are there whose sums of digits are multiples of 3? (3 marks)

2. 有多少個三位正立方數，其三位數字互不相同？ （3分）

   How many three-digit positive cubes are there whose three digits are pairwise distinct? (3 marks)

3. 已知 $1234^2 = 1522756$。求 2468^2 的最後四位數字（從左至右）。 （3分）

   Given $1234^2 = 1522756$. Find the last four digits of 2468^2 (from left to right). (3 marks)

4. 嘉琳每連續五天最多只會有一天到圖書館。那麼她在一月份中最多到了圖書館多少次？ （3分）

   Macy goes to the library at most once in any consecutive five days. At most how many times will Macy go to the library in January? (3 marks)

5. 一個五邊形的其中四隻內角分別是某四邊形的四隻內角的 1.2 倍，而第五隻內角是 $x°$，求 x 的值。 （4分）

   Four interior angles of a pentagon are 1.2 times the four interior angles of a quadrilateral respectively, while the fifth interior angle is $x°$. Find the value of x. (4 marks)

6. 設 a、b、c 為正整數，使得 $a! \times b! \times c! = 25920$（其中 $m! = 1 \times 2 \times \cdots \times m$），求 a 的最大可能值。 （4分）

   Let a, b, c be positive integers such that $a! \times b! \times c! = 25920$ (where $m! = 1 \times 2 \times \cdots \times m$). Find the greatest possible value of a. (4 marks)

7. 一個正方形的邊長與一個圓形的半徑相同。後者的周界是前者的多少倍？　（4分）

The side length of a square is the same as the radius of a circle. How many times the perimeter of the former is the perimeter of the latter?　（4 marks）

8. 求最小的四位正整數 n，它可被 9 整除，其四個數字均非零且互不相同。　（4分）

Find the smallest four-digit positive integer n which is divisible by 9 and which consists of four pairwise distinct non-zero digits.　（4 marks）

9. 一個各邊長度為整數的長方體的表面積與一個邊長為整數的正方形的面積相等。求正方形邊長的最小可能值。　（5分）

The surface area of a cuboid whose side lengths are all integral is equal to the area of a square with integral side length. Find the smallest possible side length of the square.　（5 marks）

10. 現將一個正方體分割成兩個長方體，使得它們的體積比等於 3:2，表面積比以最簡形式表示時為 $a:b$。求 $a+b$ 的值。　（5分）

A cube is cut into two cuboids such that the ratio of their volumes is $3:2$, and the ratio of their surface areas is $a:b$ in lowest form. Find the value of $a+b$.　（5 marks）

11. 現有很多堆金幣。已知第一堆有 3 枚金幣，且對正整數 n，第 $(n+1)$ 堆金幣比第 n 堆金幣多 $(2n+1)$ 枚。那麼第 15 堆有多少枚金幣？　（5分）

There are many piles of coins. It is known that the first pile consists of 3 coins. For positive integer n, the $(n+1)$ st pile has $(2n+1)$ more coins than the n-th pile. How many coins are there in the 15th pile?　（5 marks）

12. 已知 p、q、r 為質數。若 $pq+pr=80$ 而 $pq+qr=425$，求 $p+q+r$ 的值。　（5分）

Let p, q, r be prime numbers. If $pq+pr=80$ and $pq+qr=425$, find the value of $p+q+r$.　（5 marks）

13. 在所示的算式中，每個字母代表一個由 1 至 9 的不同數字。求 ABCE 所代表的四位數的最大可能值。 （6分）

In the addition shown, each letter represents a different digit from 1 to 9. Find the greatest possible value of the four-digit number represented by ABCE.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & A & A & B & C \\
+ & B & C & A & A \\
\hline
D & E & A & E & E \\
\end{array}
$$

(6 marks)

14. 有多少種方法可以在一個 4×4 的方格表中選取 3 個方格，使得任意兩個選取的方格均不在同一行或同一列上？ （6分）

How many ways are there to choose 3 cells from a 4×4 table such that any two chosen cells do not belong to the same row nor the same column?

(6 marks)

15. 現有一個 20×20 的白色方格表。嘉穎每次把位於同一行或同一列的 6 個連續格子塗上黑色（當中可能包括已塗黑的格子）。嘉穎最少需要多少次才可把所有格子塗上黑色？ （6分）

Given a 20×20 table in white colour. Each time Karina blackens 6 consecutive cells in the same row or the same column (these may include cells which have already been blackened). At least how many times does Karina need to blacken all cells?

(6 marks)

16. 如圖所示，D 和 E 分別位於 $\triangle ABC$ 的邊 AB 和 AC 上，使得 $AD:DB = AE:EC = 1:2$。P 和 Q 在 DE 的延長線上，使得 $BCQP$ 是長方形。若 $\triangle ABC$ 的面積是 2015，求 $BCQP$ 的面積。 （6分）

In the figure, D and E lie on sides AB and AC of $\triangle ABC$ respectively, satisfying $AD:DB = AE:EC = 1:2$. P and Q lie on the extension of DE such that $BCQP$ is a rectangle. If the area of $\triangle ABC$ is 2015, find the area of $BCQP$.
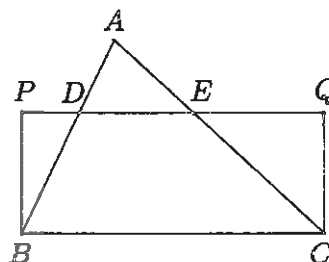
(6 marks)

17. 設 a、b、c、d 為正整數，使得 $a+b+c+d = 63$。求 $ab+bc+cd$ 的最大值。 （7分）

Let a, b, c, d be positive integers such that $a+b+c+d = 63$. Find the maximum value of $ab+bc+cd$.

(7 marks)

18. 一個半徑為 3、夾角為 $x°$ 的扇形面積和周界的數值相等。求 x 的值。 （7分）

    The area and perimeter of a sector with radius 3 and angle $x°$ are numerically equal. Find the value of x. (7 marks)

19. 有多少個四位正整數的四個數字可重新排列成一個等差數列？（例如 2534 的數字可排列成等差數列 2、3、4、5。） （7分）

    How many four-digit positive integers are there such that the four digits can be rearranged to form an arithmetic sequence? (For example, the digits of 2534 can be rearranged to form the arithmetic sequence 2, 3, 4, 5.) (7 marks)

20. 設 a、b、c 為實數，滿足 $a+\dfrac{1}{bc}=\dfrac{1}{5}$、$b+\dfrac{1}{ca}=-\dfrac{1}{15}$ 及 $c+\dfrac{1}{ab}=\dfrac{1}{3}$。求 $\left(\dfrac{c-b}{a-c}\right)^2$ 的值。 （7分）

    Let a, b, c be real numbers satisfying $a+\dfrac{1}{bc}=\dfrac{1}{5}$, $b+\dfrac{1}{ca}=-\dfrac{1}{15}$ and $c+\dfrac{1}{ab}=\dfrac{1}{3}$. Find the value of $\left(\dfrac{c-b}{a-c}\right)^2$. (7 marks)

全卷完

END OF PAPER