

第十三屆培正數學邀請賽（2014 年）

13th Pui Ching Invitational Mathematics Competition (2014)

初賽（中四組）

Heat Event (Secondary 4)

時限：1 小時 15 分

Time allowed: 1 hour 15 minutes

參賽者須知：

Instructions to Contestants:

- (a) 本卷共設 20 題，總分爲 100 分。

There are 20 questions in this paper and the total score is 100.

- (b) 除特別指明外，本卷內的所有數均爲十進制。

Unless otherwise stated, all numbers in this paper are in decimal system.

- (c) 作答時，每題的答案均須以 0 至 9999 之間的整數表示。依照答題紙上的指示填寫答案，毋須呈交計算步驟。

Each answer must be given in the form of an integer between 0 and 9999. Follow the instructions on the answer sheet to enter the answers. You are not required to hand in your steps of working.

- (d) 不得使用計算機。

The use of calculators is not allowed.

- (e) 本卷的附圖不一定依比例繪成。

The diagrams in this paper are not necessarily drawn to scale.

注意：每題的答案均須以 0 至 9999 之間的整數表示，如有需要應以上述範圍內最接近正確答案的整數回答。如有兩個這樣的整數與正確答案同樣接近，則以「四捨五入」的原則取較大的整數。請細閱答題紙上的指示。

Note: Each answer must be given in the form of an integer between 0 and 9999. Where necessary, the answer should be rounded off to the nearest integer in the above range. Read the instructions on the answer sheet in detail.

1. 在小於 100 的質數中，有多少個的個位數字為 3？ (3 分)

How many prime numbers smaller than 100 are there whose unit digits are 3? (3 marks)

2. 設  $x$  為實數。求  $(x-2)^2 + 3(x-4)^2$  的最小可能值。 (3 分)

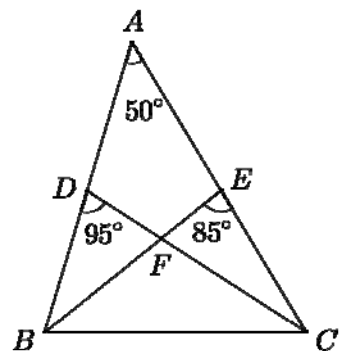
Let  $x$  be a real number. Find the smallest possible value of  $(x-2)^2 + 3(x-4)^2$ . (3 marks)

3. 設  $a_1 = \sqrt{2}$ ，並對正整數  $n$  定義  $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ 。若  $a_8 = 2^{\frac{p}{q}}$ ，其中  $\frac{p}{q}$  為最簡分數。求  $p$  的值。 (3 分)

Let  $a_1 = \sqrt{2}$  and define  $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$  for positive integers  $n$ . If  $a_8 = 2^{\frac{p}{q}}$  where  $\frac{p}{q}$  is in lowest form, find the value of  $p$ . (3 marks)

4. 在  $\triangle ABC$  中， $\angle BAC = 50^\circ$ 。  $D$  和  $E$  分別為  $AB$  和  $AC$  上的點，使得  $\angle BDC = 95^\circ$  和  $\angle BEC = 85^\circ$ 。  $BE$  和  $CD$  相交於  $F$ 。若  $\angle BFC = x^\circ$ ，求  $x$  的值。 (3 分)

In  $\triangle ABC$ ,  $\angle BAC = 50^\circ$ .  $D$  and  $E$  are points on  $AB$  and  $AC$  respectively such that  $\angle BDC = 95^\circ$  and  $\angle BEC = 85^\circ$ .  $BE$  and  $CD$  intersect at  $F$ . If  $\angle BFC = x^\circ$ , find the value of  $x$ .

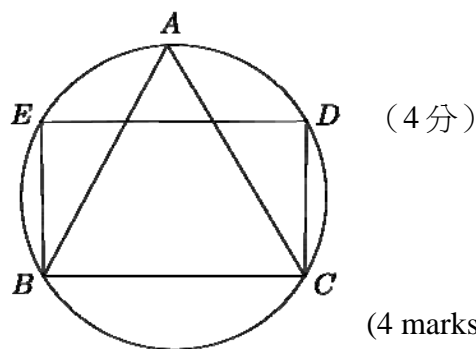


5. 有多少個四位正整數的各個數字均為平方數？（註：0 是平方數。） (4 分)

How many four-digit positive integers are there such that each of its digits is a square number? (Note: 0 is a square number.) (4 marks)

6. 如圖所示，等邊三角形  $ABC$  內接於一個半徑為 4 的圓形。設  $D$  和  $E$  為圓上的點，使得  $BCDE$  為長方形。若  $BCDE$  面積為  $S$ ，求  $S^2$  的值。

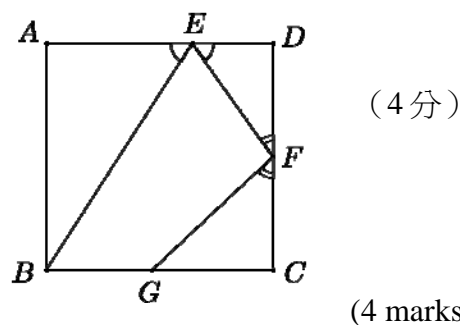
In the figure,  $\triangle ABC$  is equilateral and inscribed in a circle of radius 4. Let  $D$  and  $E$  be points on the circle such that  $BCDE$  is a rectangle. If the area of  $BCDE$  is  $S$ , find the value of  $S^2$ .



(4 marks)

7. 圖中， $ABCD$  是邊長為 50 的正方形， $E$ 、 $F$ 、 $G$  分別是  $AD$ 、 $DC$  和  $CB$  上的點，使得  $AE:ED=4:1$ 、 $\angle AEB = \angle FED$  及  $\angle DFE = \angle GFC$ 。求  $BG$  的長度。

In the figure,  $ABCD$  is a square of side length 50.  $E$ ,  $F$  and  $G$  are points on  $AD$ ,  $DC$  and  $CB$  respectively such that  $AE:ED=4:1$ ,  $\angle AEB = \angle FED$  and  $\angle DFE = \angle GFC$ . Find the length of  $BG$ .



(4 marks)

8. 對正整數  $m$  和  $n$ ，設  $m*n$  為  $\frac{m}{n} + \frac{n}{m}$  的最簡分數表示式中分子與分母之差，例如：因為  $\frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$ ，所以  $2*3=7$ 。求  $\frac{(111*222)+(222*333)+\dots+(888*999)}{(1*2)+(1*3)+\dots+(1*9)}$  的值。

For positive integers  $m$  and  $n$ , let  $m*n$  denote the difference between the numerator and denominator when  $\frac{m}{n} + \frac{n}{m}$  is written as a fraction in lowest form.

For example, since  $\frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$ , we have  $2*3=7$ . Find the value of  $\frac{(111*222)+(222*333)+\dots+(888*999)}{(1*2)+(1*3)+\dots+(1*9)}$ .

(4 marks)

9. 最少需要選取多少個兩位數，才可確保當中最少有 3 個的數字之和相等？ (5 分)

At least how many two-digit numbers have to be chosen to ensure that at least 3 of the chosen numbers have the same sum of digits? (5 marks)

10. 求  $\ln\left(2^{\frac{2}{\ln 2}} + 3^{\frac{3}{\ln 3}} + \dots + 9^{\frac{9}{\ln 9}}\right)$  的值。 (5 分)

Find the value of  $\ln\left(2^{\frac{2}{\ln 2}} + 3^{\frac{3}{\ln 3}} + \dots + 9^{\frac{9}{\ln 9}}\right)$ . (5 marks)

11. 設  $N$  表示擲出兩顆勻稱的骰子時較大點數的骰子上所標示的數字。若把  $N$  的期望值以最簡分數表示，其分子是甚麼？ (5 分)

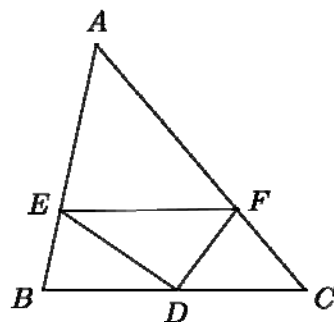
Let  $N$  denote the larger of the two numbers obtained when two fair dice are thrown. When the expected value of  $N$  is expressed as a fraction in lowest form, what is the numerator? (5 marks)

12. 已知  $m$ 、 $n$  為正整數，它們之和為 252。若它們的最大公因數和最小公倍數之和為 468，最大公因數和最小公倍數之差為 396，求  $m$  和  $n$  中較大的一個數。 (5 分)

Let  $m$  and  $n$  be positive integers with sum 252. If the sum of their H.C.F. and their L.C.M. is 468 while the difference between their H.C.F. and their L.C.M. is 396, find the larger number among  $m$  and  $n$ . (5 marks)

13. 在  $\triangle ABC$  中， $D$  是  $BC$  的中點。 $E$  和  $F$  分別是  $AB$  和  $AC$  上的點，使得  $EF \parallel BC$ 。若  $\triangle AEF$  和  $\triangle DEF$  的面積比為 7:3，且  $\triangle ABC$  的面積為 100，求  $\triangle DFC$  的面積。

In  $\triangle ABC$ ,  $D$  is the mid-point of  $BC$ .  $E$  and  $F$  be points on  $AB$  and  $AC$  respectively such that  $EF \parallel BC$ . If the ratio of the areas of  $\triangle AEF$  and  $\triangle DEF$  is 7:3, and the area of  $\triangle ABC$  is 100, find the area of  $\triangle DFC$ .



(5 分)

(5 marks)

14. 設  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為實數。若  $a+b+c=4$ 、 $a^2+b^2+c^2=10$  及  $a^3+b^3+c^3=22$ ，求  $a^4+b^4+c^4$  的值。 (6 分)

Let  $a, b, c$  be real numbers. If  $a+b+c=4$ ,  $a^2+b^2+c^2=10$  and  $a^3+b^3+c^3=22$ , find the value of  $a^4+b^4+c^4$ . (6 marks)

15. 已知  $n$  為小於 2014 的正整數，且  $n^3+3n^2+64n+5$  是 73 的倍數。那麼， $n$  有多少個不同的可能值？ (6 分)

It is given that  $n$  is a positive integer less than 2014 such that  $n^3+3n^2+64n+5$  is a multiple of 73. How many different possible values of  $n$  are there? (6 marks)

16. 有多少個三位數的數字之和不能被 7 整除？

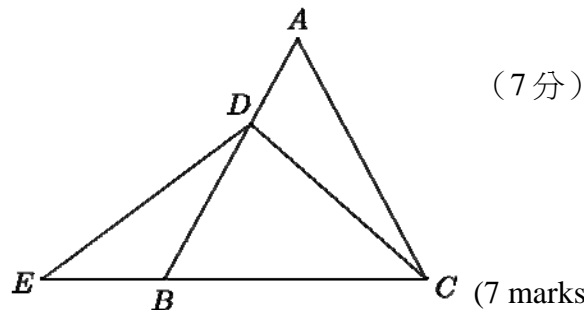
(7 分)

How many three-digit numbers have a sum of digits not divisible by 7?

(7 marks)

17. 在  $\triangle ABC$  中， $AB = AC$ 。  $D$  是  $AB$  上的一點，使得  $AD:DB = 2:5$ 。 設  $E$  為  $CB$  延長線上的一點，使得  $DE = DC$ 。 若  $\triangle DEB$  的面積為 10，求  $\triangle ABC$  的面積。

In  $\triangle ABC$ ,  $AB = AC$ .  $D$  is a point on  $AB$  such that  $AD:DB = 2:5$ . Let  $E$  be a point on the extension of  $CB$  such that  $DE = DC$ . If the area of  $\triangle DEB$  is 10, find the area of  $\triangle ABC$ .



(7 分)

(7 marks)

18. 如圖所示，一個  $3 \times 3$  的方格表的其中三格已填上整數。有多少種方法可以在餘下的方格內各填上一個整數（可以相同），使得每個方格內的數字均大於其上方及左方的數字？

As shown in the figure, integers have been filled into three cells of a  $3 \times 3$  table. How many ways are there to fill an integer (not necessarily distinct) into each of the remaining cells, so that the number in each cell is larger than the number on its top and on its left?

1		
	6	
		11

(7 分)

(7 marks)

19. 已知 2520 有 48 個正因數，記它們為  $d_1, d_2, \dots, d_{48}$ 。若把  $\frac{1}{2520+d_1^2} + \frac{1}{2520+d_2^2} + \dots + \frac{1}{2520+d_{48}^2}$  寫成最簡分數，其分母是甚麼？

(7 分)

It is known that 2520 has 48 positive factors. Denote them by  $d_1, d_2, \dots, d_{48}$ .

What will be the denominator when  $\frac{1}{2520+d_1^2} + \frac{1}{2520+d_2^2} + \dots + \frac{1}{2520+d_{48}^2}$  is expressed as a fraction in lowest form?

(7 marks)

20. 在以下方程組中求  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  的值。 (7 分)

Find the value of  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  in the following system of equations. (7 marks)

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y + z = 2 \\ x + y^2 + z = -\frac{2}{9} \\ x + y + z^2 = -\frac{2}{9} \\ xy + yz + zx + \frac{7}{9} = x + y + z \end{array} \right.$$

全卷完

**END OF PAPER**