第十三屆培正數學邀請賽（2014 年）

13th Pui Ching Invitational Mathematics Competition (2014)

初賽（中三組）

Heat Event (Secondary 3)

時限：1 小時 15 分

Time allowed: 1 hour 15 minutes

參賽者須知：

Instructions to Contestants:

(a) 本卷共設 20 題，總分爲 100 分。

There are 20 questions in this paper and the total score is 100.

(b) 除特別指明外，本卷內的所有數均爲十進制。

Unless otherwise stated, all numbers in this paper are in decimal system.

(c) 作答時，每題的答案均須以 0 至 9999 之間的整數表示。依照答題紙上的指示填寫答案，毋須呈交計算步驟。

Each answer must be given in the form of an integer between 0 and 9999. Follow the instructions on the answer sheet to enter the answers. You are not required to hand in your steps of working.

(d) 不得使用計算機。

The use of calculators is not allowed.

(e) 本卷的附圖不一定依比例繪成。

The diagrams in this paper are not necessarily drawn to scale.

注意：每題的答案均須以 0 至 9999 之間的整數表示，如有需要應以上述範圍內最接近正確答案的整數回答。如有兩個這樣的整數與正確答案同樣接近，則以「四捨五入」的原則取較大的整數。請細閱答題紙上的指示。

Note: Each answer must be given in the form of an integer between 0 and 9999. Where necessary, the answer should be rounded off to the nearest integer in the above range. Read the instructions on the answer sheet in detail.

1. 在小於 100 的質數中，有多少個的十位數字爲 5？ （3 分）

   How many prime numbers smaller than 100 are there whose tens digits are 5? (3 marks)

2. 已知 a、b、c 分別爲三位、兩位和一位正整數，其中 a 的三個數字相同，而 b 的兩個數字亦相同。若 $a+b+c$ 爲四位數，求此四位數的最小可能值。 （3 分）

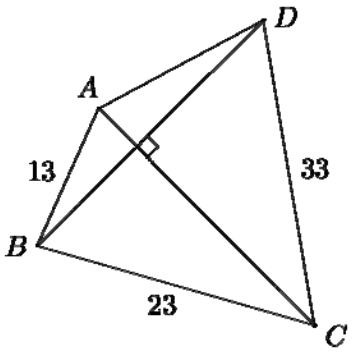
   Suppose a, b and c are three-digit, two-digit and one-digit positive integers respectively, such that the three digits of a are the same, and the two digits of b are also the same. If $a+b+c$ is a four-digit number, find the smallest possible value of this four-digit number. (3 marks)

3. 求 $1+3+3^2+\cdots+3^6$ 的值。 （3 分）

   Find the value of $1+3+3^2+\cdots+3^6$. (3 marks)

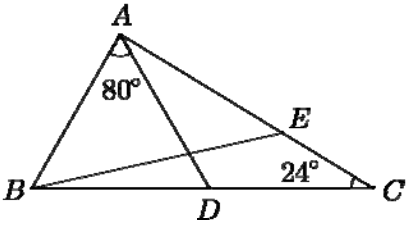
4. 在四邊形 $ABCD$ 中，AC 與 BD 垂直。若 $AB=13$、$BC=23$ 及 $CD=33$，求 DA 的長度。 （3 分）

   In quadrilateral $ABCD$, AC and BD are perpendicular. If $AB=13$, $BC=23$ and $CD=33$, find the length of DA. (3 marks)



5. 在 ΔABC 中，D 和 E 分別爲邊 BC 和 CA 上的點，使得 $AB=AD=AE$。若 $\angle BAD=80°$、$\angle ACB=24°$ 及 $\angle AEB=x°$，求 x 的值。 （4 分）

   In ΔABC, D and E are points on BC and CA respectively such that $AB=AD=AE$. If $\angle BAD=80°$, $\angle ACB=24°$ and $\angle AEB=x°$, find the value of x. (4 marks)



6. 有多少個四位正整數的各個數字均爲平方數？（註：0 是平方數。） （4 分）

How many four-digit positive integers are there such that each of its digits is a square number? (Note: 0 is a square number.) (4 marks)

7. 已知 a、b、c 爲正整數，其中 a 和 b 的最大公因數爲 36、a 和 c 的最大公因數爲 18，且 a 和 bc 的最大公因數爲 72。求 a、b 和 c 的最大公因數。 （4 分）

Let a, b, c be positive integers such that the H.C.F. of a and b is 36, the H.C.F. of a and c is 18, while the H.C.F. of a and bc is 72. Find the H.C.F. of a, b and c. (4 marks)

8. 設 n 爲四位數，其四個數字互不相同，且每個數字均是 n 的因數。求 n 的最大可能值。 （4 分）

Let n be a four-digit number such that its four digits are pairwise distinct, and that each digit is a factor of n. Find the greatest possible value of n. (4 marks)

9. 若某個多於一位的正整數中每個數字均大於其右邊的數字，則稱該數爲「下降數」，例如：65 和 410 爲「下降數」；而 22 和 2014 則不是「下降數」。求小於 1000 的「下降數」的數目。 （5 分）

If every digit of a positive integer with more than one digit is larger than the digit on its right, then the integer is called a ‘decreasing number’. For example, 65 and 410 are ‘decreasing numbers’, while 22 and 2014 are not. Find the number of ‘decreasing numbers’ smaller than 1000. (5 marks)

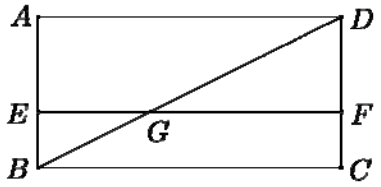
10. 對正整數 m 和 n，設 $m*n$ 爲 $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$ 的最簡分數表示式中分子與分母之和，例如：因爲 $\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{13}{6}$，所以 $2*3=19$。求 24^2*26^2 的最大質因數。 （5 分）

For positive integers m and n, let $m*n$ denote the sum of the numerator and denominator when $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$ is written as a fraction in lowest form. For example, since $\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{13}{6}$, we have $2*3=19$. Find the largest prime factor of 24^2*26^2. (5 marks)

11. 設 a 爲 2014 位數，且可被 9 整除。若 b 是 a 的數字之和，而 c 是 b 的數字之和，求 c 的最大可能值。 （5 分）

Let a be a 2014-digit number which is divisible by 9. If b is the sum of digits of a and c is the sum of digits of b, find the greatest possible value of c. (5 marks)

12. 在長方形 *ABCD* 中，*E* 和 *F* 分別爲 *AB* 和 *CD* 上的點，使得 *AD* // *EF* // *BC*。*EF* 和 *BD* 相交於 *G*。若 ΔBEG 和 ΔDFG 的面積分別爲 18 和 50，求 *ABCD* 的面積。 （5 分）



In rectangle *ABCD*, *E* and *F* are points on *AB* and *CD* respectively such that *AD* // *EF* // *BC*. *EF* and *BD* intersect at *G*. If the areas of ΔBEG and ΔDFG are 18 and 50 respectively, find the area of *ABCD*. (5 marks)

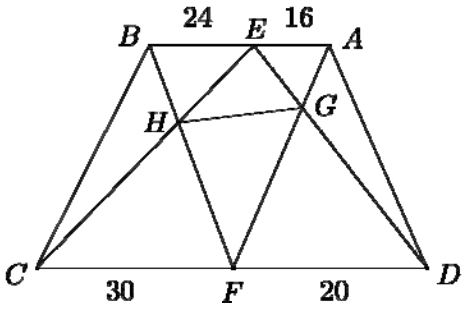
13. 一個袋子裏裝有 *m* 個白球和 *n* 個黑球。若從中任意抽出兩個球，則取得兩個白球的概率爲 $\frac{1}{5}$。求 *n* 的最小可能值。 （5 分）

In a bag, there are *m* white balls and *n* black balls. If two balls are randomly chosen from it, the probability of getting two white balls is $\frac{1}{5}$. Find the smallest possible value of *n*. (5 marks)

14. 若方程 $(4+\sqrt{3})x^2-(5+6\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})=0$ 的最大實根爲 $a+b\sqrt{3}$，其中 *a* 和 *b* 爲有理數，求 $a+b$ 的值。 （6 分）

If the greatest real root to the equation $(4+\sqrt{3})x^2-(5+6\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})=0$ is $a+b\sqrt{3}$, where *a* and *b* are rational numbers, find the value of $a+b$. (6 marks)

15. 在梯形 *ABCD* 中，*AB* // *DC*。*E* 和 *F* 分別爲 *AB* 和 *CD* 上的點，使得 $AE=16$、$BE=24$、$CF=30$ 和 $DF=20$。*AF* 和 *DE* 相交於 *G*；*BF* 和 *CE* 相交於 *H*。求 *GH* 的長度。 （6 分）



In trapezium *ABCD*, *AB* // *DC*. *E* and *F* are points on sides *AB* and *CD* respectively such that $AE=16$, $BE=24$, $CF=30$ and $DF=20$. *AF* and *DE* intersect at *G*, while *BF* and *CE* intersect at *H*. Find the length of *GH*. (6 marks)

16. 有多少個三位數的數字之和不能被 7 整除？ （7 分）

How many three-digit numbers have a sum of digits not divisible by 7? (7 marks)

17. 在以下方程組中求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 的值。 （7分）

Find the value of $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ in the following system of equations. (7 marks)

$$\begin{cases} x^2+y+z=2 \\ x+y^2+z=-\frac{2}{9} \\ x+y+z^2=-\frac{2}{9} \\ xy+yz+zx+\frac{7}{9}=x+y+z \end{cases}$$

18. 已知 m、n 爲正整數。若 $m^2+mn^2-m-2n^2=520$，求 $m+n$ 的值。 （7分）

Let m and n be positive integers. If $m^2+mn^2-m-2n^2=520$, find the value of $m+n$. (7 marks)

19. 已知 2520 有 48 個正因數，記它們爲 d_1、d_2、…、d_{48}。若把 $\frac{1}{2520+{d_1}^2}+\frac{1}{2520+{d_2}^2}+\cdots+\frac{1}{2520+{d_{48}}^2}$ 寫成最簡分數，其分母是甚麼？ （7分）

It is known that 2520 has 48 positive factors. Denote them by d_1, d_2, …, d_{48}. What will be the denominator when $\frac{1}{2520+{d_1}^2}+\frac{1}{2520+{d_2}^2}+\cdots+\frac{1}{2520+{d_{48}}^2}$ is expressed as a fraction in lowest form? (7 marks)

20. 某次測驗有五道選擇題，每題有四個選擇，其中只有一個是正確的。某班的 n 名學生在測驗中答對的題數全部相同，但沒有兩人的答案完全相同。已知每名學生在每題均選了剛好一個答案，求 n 的最大可能值。 （7分）

In a test there are five multiple choice questions, each with four choices, among which only one is correct. The n students of a class have taken the test and they all end up having the same number of correct answers, although no two students have identical answers. Given that each student has chosen exactly one answer for each question, find the greatest possible value of n. (7 marks)

全卷完

END OF PAPER