第十二屆培正數學邀請賽（2013 年）

12th Pui Ching Invitational Mathematics Competition (2013)

初賽（中三組）

Heat Event (Secondary 3)

時限：1 小時 15 分

Time allowed: 1 hour 15 minutes

參賽者須知：

Instructions to Contestants:

(a) 本卷共設 20 題，總分爲 100 分。

There are 20 questions in this paper and the total score is 100.

(b) 除特別指明外，本卷內的所有數均爲十進制。

Unless otherwise stated, all numbers in this paper are in decimal system.

(c) 作答時，每題的答案均須以 0 至 9999 之間的整數表示。依照答題紙上的指示填寫答案，毋須呈交計算步驟。

Each answer must be given in the form of an integer between 0 and 9999. Follow the instructions on the answer sheet to enter the answers. You are not required to hand in your steps of working.

(d) 不得使用計算機。

The use of calculators is not allowed.

(e) 本卷的附圖不一定依比例繪成。

The diagrams in this paper are not necessarily drawn to scale.

注意：每題的答案均須以 0 至 9999 之間的整數表示，如有需要應以上述範圍內最接近正確答案的整數回答。如有兩個這樣的整數與正確答案同樣接近，則以「四捨五入」的原則取較大的整數。請細閱答題紙上的指示。

Note: Each answer must be given in the form of an integer between 0 and 9999. Where necessary, the answer should be rounded off to the nearest integer in the above range. Read the instructions on the answer sheet in detail.

1. 如果某正整數由左至右和由右至左看皆相同，我們稱這個數為「回文數」。例如 3883、12321 和 25052 都是「回文數」。求第二接近 997 的「回文數」。（3 分）

   If a positive integer reads the same from left to right as from right to left, it is called a ‘palindrome’. For example, 3883, 12321 and 25052 are ‘palindromes’. Find the ‘palindrome’ which is second closest to 997. (3 marks)

2. 已知平面上有 100 條直線，求直線交點數目的最大值。（3 分）

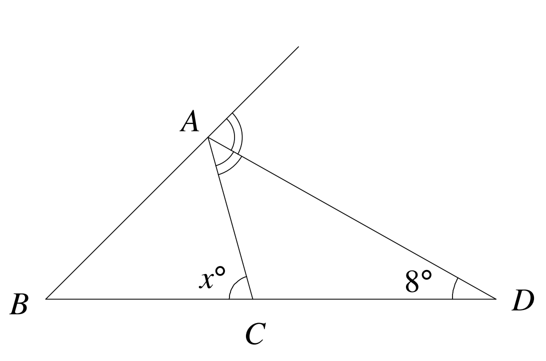
   There are 100 straight lines on the plane. Find the maximum number of intersections of the straight lines. (3 marks)

3. 已知從無窮實數數列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 中，任意一項或任意連續多項之積均相同。問 a_2 有多少個不同的可能值？（3 分）

   It is known that in the infinite sequence of real numbers $a_1, a_2, a_3, \ldots$, any term and the product of any number of consecutive terms is the same. How many possible values of a_2 are there? (3 marks)

4. 在 ΔABC 中，$\angle A$ 為 $\angle B$ 的兩倍。設 D 為 $\angle A$ 的外角平分線與 BC 延長線上的交點，且 $\angle ADB = 8°$。若 $\angle ACB = x°$，求 x 的值。（3 分）

   In ΔABC, $\angle A$ is twice as large as $\angle B$. Let D be the intersection of the external angle bisector of $\angle A$ and the extension of side BC. Suppose $\angle ADB = 8°$. If $\angle ACB = x°$, find the value of x. (3 marks)



5. 某平行四邊形的面積爲 2013，其中一邊的長度爲 119。求它的周界的最小可能值。 （4 分）

A parallelogram has area 2013 and one of its sides has length 119. Find the smallest possible value of its perimeter. (4 marks)

6. 若 x、y 爲正數，且 $2(x^2-3y^2)=xy$，求 $\frac{x}{y}$ 的值。 （4 分）

If x, y are positive and $2(x^2-3y^2)=xy$, find the value of $\frac{x}{y}$. (4 marks)

7. 設 $[x]$ 代表不超過 x 的最大整數，例如 $[1.1]=1$、$[6.9]=6$ 和 $[5]=5$。求 $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\cdots+\left[\sqrt{99}\right]+1^2+2^2+\cdots+9^2$ 的值。 （4 分）

Let $[x]$ denote the greatest integer not exceeding x. For example, $[1.1]=1$, $[6.9]=6$ and $[5]=5$. Evaluate $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\cdots+\left[\sqrt{99}\right]+1^2+2^2+\cdots+9^2$. (4 marks)

8. 設 m、n 爲正整數，且 m^2 和 n^3 的最小公倍數爲 144。求 $m+n$ 所有可能值之和。 （4 分）

Let m and n be positive integers such that the L.C.M. of m^2 and n^3 is 144. Find the sum of all possible values of $m+n$. (4 marks)

9. 已知對任意正整數 n，n^3+11n 均爲 k 的倍數，其中 k 爲正整數。求 k 所有可能值之和。 （5 分）

It is given that for any positive integer n, n^3+11n is a multiple of k, where k is a positive integer. Find the sum of all possible values of k. (5 marks)

10. 一隻螞蟻從座標平面的原點 $(0,0)$ 出發，牠每步可以由點 (x, y) 爬至 $(x+1, y+1)$ 或 $(x+1, y-1)$，問：該螞議爬至點 $(10,0)$ 有多少種不同方法？ （5 分）

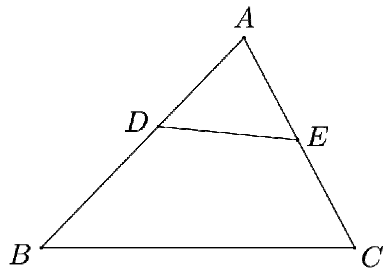
An ant starts from the origin $(0,0)$ of the coordinate plane. In each step, it can crawl from (x, y) to either $(x+1, y+1)$ or $(x+1, y-1)$. In how many different ways can the ant crawl to point $(10,0)$? (5 marks)

11. 若某正整數的數字可以分成左右兩部分，使得兩部分互換後所得的整數和原整數相同，則該數稱爲「好數」，例如：因爲 101010 可分成「10」和「1010」兩部分，且符合上述條件，故 101010 是「好數」。求四位「好數」的數目。 （5 分）

A positive integer is said to be ‘good’ if its digits can be separated into two parts (left and right) such that, when the two parts are interchanged, the resulting integer is the same as the original integer. For instance, 101010 is ‘good’ since it can be separated into ‘10’ and ‘1010’ and the above condition holds. How many four-digit numbers are ‘good’? (5 marks)

12. 在 ΔABC 中，D 和 E 分別是 AB 和 AC 上的點，使得 $AD:DB=2:3$ 及 $AE=EC$。若 ΔADE 的面積爲 120，求 ΔABC 的面積。 （5 分）

In ΔABC, D and E are points on AB and AC respectively such that $AD:DB=2:3$ and $AE=EC$. If the area of ΔADE is 120, find the area of ΔABC. (5 marks)



13. 對於正整數 n，若 n 任意一個數字或多個連續數字的乘積均不相同，則稱 n 爲「好數」。例如，因爲 2、3、4、2×3、3×4 和 $2\times3\times4$ 互不相同，故 234 爲「好數」；但因爲 $2\times3=6$，故 236 不是「好數」。求三位「好數」的數目。 （6 分）

A positive integer n is said to be ‘good’ if the product of any one or several consecutive digits of n is different from each other. For example, 234 is ‘good’ since 2, 3, 4, 2×3, 3×4 and $2\times3\times4$ are all distinct, while 236 is not ‘good’ since $2\times3=6$. How many three-digit numbers are ‘good’? (6 marks)

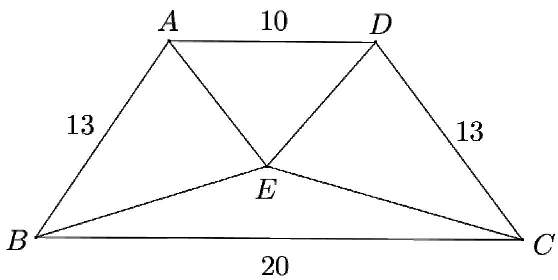
14. 現投擲四顆勻稱的骰子，已知所得的點數能以某次序排成一個相鄰項相差剛好爲 1 的數列（例如 2、3、2、1）的概率以最簡分數表示時爲 $\frac{m}{n}$，求 $m+n$ 的值。 （6 分）

Four fair dice are thrown. If the probability that the numbers obtained can be rearranged into a sequence in which any two consecutive terms differ by exactly 1 (e.g. 2, 3, 2, 1) is $\frac{m}{n}$ in lowest term, find the value of $m+n$. (6 marks)

15. 小美寫下了一個四位數，它的四位數字都不是 0。小美發現，若把這個數的四位數字任意重新排列，可以得到一些不同的四位數。然後，小美把這些四位數中最小的一個除以最大的一個，得到答案 S。已知 S 的最小可能值以最簡分數表示時爲 $\frac{m}{n}$，求 $n-m$ 的值。 （6分）

May wrote down a four-digit number which consists of four non-zero digits. She found that by randomly rearranging the digits, different four-digit numbers can be formed. She then divided the smallest of these numbers by the largest, and obtained the answer S. If the smallest possible value of S is $\frac{m}{n}$ in lowest term, find the value of $n-m$. (6 marks)

16. 如圖所示，$ABCD$ 是等腰梯形，其中 $AD \,//\, BC$，$AD=10$，$BC=20$ 及 $AB=CD=13$。點 E 在梯形內，使得 AED 和 BEC 均爲等腰三角形（$AE=DE$ 及 $BE=CE$），且它們的面積相等。求 ΔAED 和 ΔBEC 的周界之差。 （6分）



In the figure, $ABCD$ is an isosceles trapezium where $AD \,//\, BC$, $AD=10$, $BC=20$ and $AB=CD=13$. E is a point inside the trapezium such that ΔAED and ΔBEC are both isosceles (with $AE=DE$ and $BE=CE$) with the same area. Find the difference in the perimeters of ΔAED and ΔBEC. (6 marks)

17. 求 $\dfrac{(\sqrt{20}-\sqrt{13})^2}{\sqrt{33}-\sqrt{10}-\sqrt{\dfrac{13}{2}}}$ 的值。 （7分）

Evaluate $\dfrac{(\sqrt{20}-\sqrt{13})^2}{\sqrt{33}-\sqrt{10}-\sqrt{\dfrac{13}{2}}}$. (7 marks)

18. 已知對正整數 n 皆有 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。若 $1^2+2^2+\cdots+n^2$ 可被 2013 整除，求 n 的最小可能值。 （7分）

Given $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ for positive integer n. If $1^2+2^2+\cdots+n^2$ is divisible by 2013, find the smallest possible value of n. (7 marks)

19. 若 a、b、c 均爲不超過 10 的正整數，且 $a^{1997}b^{2047}+c$ 和 $a^{2011}b^{2012}c^{2013}+ac+b$ 均爲 3 的倍數，問 (a,b,c) 有多少組不同的可能值？ （7分）

If a, b, c are positive integers not exceeding 10 such that both $a^{1997}b^{2047}+c$ and $a^{2011}b^{2012}c^{2013}+ac+b$ are multiples of 3, how many different sets of possible (a,b,c) are there? (7 marks)

20. 已知方程 $x^4-ax^3+767x^2-4263x+b=0$ 的其中兩個解爲 $x=15$ 和 $x=24$。求 $a+b$ 的值。 （7分）

It is given that $x=15$ and $x=24$ are two of the solutions to the equation $x^4-ax^3+767x^2-4263x+b=0$. Find the value of $a+b$. (7 marks)

全卷完

END OF PAPER